

关于现行微积分原理的再思考

丁小平

(北京二十一世纪药理科学研究院 北京 100092)

摘 要:始于达朗贝尔终于勒贝格所建立的微积分原理被称为现行微积分原理体系。本文分别从现行微积分原理体系中微分定义、结构合理性、解决具体问题的能力、易读性以及科学发展影响众多角度进行分析论述,提出了自己的思考。

关键词:微积分 微分 极限论

中图分类号:O172

文献标识码:A

文章编号:1674-098X(2011)10(b)-0156-02

1667年,牛顿创建了微积分方法和自己并不满意的微积分原理^[1]。1821年,柯西否定了以牛顿和莱布尼兹共同思想为内容,以莱布尼兹表达方式形式的微积分发展路线,并与后来的数学家Riemann、Weierstrass、Darboux和Lebesgue一道建立了现行微积分体系^[2]。尽管经历了344年的改建,这座大厦的基础部分似乎仍然是值得完善的,不少学者对此都提出了自己的思考与质疑。王昆扬论述了Riemann积分理论的本质缺陷是不承认 s -可加性,指出在大学数学系本科基础课中以Lebesgue积分取代Riemann积分是历史的必然^[3]。王泽汉则运用马克思关于无限小的辩证观点,指出微积分中某些概念和方法的缺陷与不足,如极限定义中的“ $e-N$ ”与“ $e-d$ ”掩盖了矛盾的实质,从而在微积分中产生了一些不能自圆其说的矛盾,并在此基础上提出新的极限理论以及微积分学的改革途径^[4]。米哈伊·列夫舍茨指出现行微积分教材中的喧宾夺主,提出了不需要连续性、极限和紧性的概念直接、自然却严格地建立微分和积分的流线型理论的新方法^[5]。李清文指出马克思的微分方法与传统的微分方法区别甚大,他从哲学角度入手,证明了无限小是一个理想的数,是一个变数,从而佐证了马克思的观点^[6]。此外,如林群、张景中、师教民等著名学者,也一直在从事着与微积分简化普及或完善革新的工作。

本文在总结前辈的研究成果的基础上,分别从现行微积分原理体系中微分定义、结构合理性、解决具体问题的能力、易读性以及对科学发展的影响角度进行分析论述,指出了现行微积分原理中仍需商榷之处。

1 现行微积分原理体系中微分定义的思考

现行微积分原理定义 $\Delta y = f(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ 的线性主部 $f(x_0)\Delta x$ 为微分。为了凑出承上启下的 $dy = f(x_0)dx$ 形式,又制造了两种方法:其一,认为 x 的微分就是 $y = x$ 的微分^[7];其二,定义 $dx = \Delta x$ ^[8]。基于这两种方法之一, $dy = f(x_0)\Delta x$ 就变成了 $dy = f(x_0)dx$ 。

然而,定义 $dx = \Delta x$ 与逻辑规则有相违背之处。因为对 $y = F(x)$, x 是原因, y 是结果,同时, y 又是它的结果的原因, x 又是它的原因的结果。任何一对因果关系都是现实因果链中的一个环节,其反映到数学上就是 $z = E(y)$, $y = F(x)$, $x = H(t)$ 。因此,除非特殊情况,否则 $\Delta x = h(t)\Delta t + o_h(\Delta t) = dx + o_h(\Delta t)$,即 $\Delta x \neq dx$ 。由此可见,定义 $dx = \Delta x$ 是与现实不符的。可是,现行微积分原理在讲如此这般的微分定义的同时,都在讲复合函数;不仅如此,还要讲参数方程和极坐标方程的求导和积分。

从表面上看, dx 是否是 Δx 似乎仅仅是个符号选择问题,其实不然,这里关乎微分到底是Cauchy意义的 Δy 还是 Δy 的线性主部,否则,就处理不掉,Cauchy体系就形不成。微分概念是微积分原理中的根本性概念,它上承导数,下启积分,如果微分概念有了原则性的错误,那么,该微积分原理的正确性值得进行进一步思考。

2 关于现行微积分原理体系结构的思考

现行微积分原理中,首先介绍极限论,然后采用算增量,求比值及取极限三步求解导数,即用极限工具定义了导数。对微分定义之后,用导数来计算微分。不定积分是导数抑或是微分想当然的逆演绎,而不是可实现的逆演绎;定积分只是一个和式的极限,它与不定积分可以肯定的关系是,定积分借助于不定积分计算。这就是现行微积分原理的结构。

在定积分与不定积分是否可以统一的问题上,有两派互不相同的观点。到了二十世纪以后,以勒贝格为代表的数学家已不再提统一的问题,他们关注的是定积分的可积条件。这就是现行微积分原理的现状。一般说来,理论是可以发展的,既然存在两派的争论,就有可能出现统一派战胜非统派的局面,从而统一现行的不定积分和定积分,同时,纠正其中错误并形成合理的微积分原理。可事实上不然,因为用极限思想构建的微积分原理还有不足,以定积分为例,微分的逆演绎不是,也不可能是分割、求和、取极限,因此,无论如何,即使把这样的定积分看作变上限的定积分后与反微分——不定积分凑出相同的结果,也不可能是反微分的演绎过程,因此,即使勉强统一,也不伦不类。且不说求和之前分割的原因莫名其妙,求和后的极限就更匪夷所思,因为极限不是过程,而是彼岸的结果。

现行微积分原理是微积分演化史中的一个过程,有其存在的历史依据,应该说它就是完善的微积分原理建立之前的权宜性微积分原理,具有相当重要的理论意义和历史必然性。完善的微积分原理结构是把自变量或因变量微化到一定程度就构成微分,微分的积化就构成反微分——积分,也就是说微分和积分是互逆演绎,导数就是微商,求和问题不过是确定积分范围的积分。

3 关于现行微积分原理体系对具体问题解决思考

作为应用方法,以牛顿和莱布尼兹思想为内容的,以莱布尼兹的 dx 和 $\int$ 为表达形式的微积分方法是放之四海皆灵的;然而作为基础理论,直到勒贝格,现行微积分原理中 dx 和 $\int$ 的本质还存在争议。

从宏观上看,现行微积分原理在用它的微分定义错误地回答了莱布尼兹的 dx 后,又把莱布尼兹的 $\int$ 改成了“和极限”。如果说 $\int$ 与“极限”和“可能同质不同量的话,那么 $\int$ 和“和极限”既不同质又不同量。而再把莱布尼兹的“ $z = \int y dx$ (即 $z = \int y(x) dx$)”改成不定积分和求和问题(即所谓的定积分),那就是离题更远。

从微观上看,现行微积分原理也没完全解决重要的具体问题,如 $\frac{0}{0}$ 问题。导数问题,从代数角度看是平均变化率和即时变化率问题;从几何角度看是曲线的割线和切线的斜率问题。变化率和斜率不过是一个导数问题的两个方面,因此,从任何一个角度看都等价于另一个角度。为直观起见,我们不妨选取几何角度进行分析判断。 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的模拟过程,就是割线转化为切线的过程。

在割线状态下,割线与曲线有两个交点,在割线转化为切线后,切线是否与曲线只有一个交点?如果只有一个交点,那么, Δx 和 Δy 是否都是 0?导数是否就是 $\frac{0}{0}$?到底应该否认 $\frac{0}{0}$ 还是应该重新定义代数结构?

通过如上的简单陈述,我们不难发现:从宏观上看,现行微积分原理所表述的存在一些争议;从微观上看,诸如 $\frac{0}{0}$ 这样的重要问题也没有回答(用极限回避了)。当然,我们不应责难柯西和勒贝格等数学家和传授现行微积分原理的人们,因为,科学难题的解决并非易事。但是,对现行微积分原理体系的重新反思是很有必要的了。

4 现行微积分原理体系易读性的思考

我们说现行微积分原理是较难读懂的,是比较晦涩的^[7],是相对于本来的微积分原理的难度和现代人的理解能力而言的。这种不应有的晦涩度是由如下几个原因造成的:

1. 现行微积分原理以极限论为工具,因而,把极限论语言的晦涩(如 ϵ - δ 语言)和极限论自身的理论困惑全部带到微积分中来了。

2. 由于极限论的局限性,给微积分原理的建立造成了不必要的迂回,使简单问题复杂化。如,先用极限定义导数,再由导数定义微分,而且这个微分还是脱离原函数可逆系综的有逻辑错误的微分,然后,再从微商绕回导数。又如,柯西把积分定义成 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$, 并且用傅立叶的 $\int_a^b f(x) dx$ 表示,那么,式中的 $f(x_i) \Delta x_i$ 与 $f(x) dx$ 是不是微分?柯西定义 $dx = \Delta x$, 式中的 $f(x_i) \Delta x_i$ 与 $f(x) dx$ 有何异同? $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ 是否可以写作 $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx_i$? 如果可以,则有 $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx_i = \int_a^b f(x) dx$, 那么,“ $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n$ ”与“ $\int_a^b$ ”又是什么关系?定积分在解决应用问题时,积分元 $f(x) dx$ 又是什么?为什么说对积分元要在求和之后再取极限才是精确值?当然,这是积分元在 $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx_i$ 中,而在 $\int_a^b f(x) dx$ 中累加就是精确值。在莱布尼兹和欧拉那里问题也这么复杂吗?这种“复杂”是必须的吗?

$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ 和 $\int_a^b f(x) dx$ 同构吗? $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n^2 + k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$

是偶然的吗?在使用积分元时,有 $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx_i = \int_a^b f(x) dx$, 在左端 $dx \rightarrow 0$ 后,右端的 dx 是什么?令人不得要领。

3. 本来, dx 的本质揭示后,可以丰富实数理论,也可以解开一些重大的数学之谜。而现行这种不去回答 dx 本质的微积分原理,却反过来要实数和可测集等理论为自己服务,结果,为了弄清几个怪癖问题的可积性,还得再学实变函数。

就整个数学和数学作为其它科学的工具而言,微积分学和作为微积分基本原理和方法深化的微分方程和积分方程的作用之大是无与伦比的。可是,现行微积分体系却比较晦涩难懂,很难说现行微积分原理满足要求了。

5 现行微积分原理对科学发展影响的思考

现行微积分原理的建设始自柯西,结束于勒贝格。只要查一查微积分演化史和科学史^[3],便会发现一个无可争辩的事实:微积分基本方法是牛顿和莱布尼兹创建的,微积分的重要延伸性方法几乎都是以欧拉、傅立叶、高斯为代表的数学家在1821年前创建

的,力学成果是以拉格朗日为代表的数学、力学家创造的。虽然柯西1821年著出《分析教程》之后,物理学有麦克斯韦、普朗克和爱因斯坦的成果,力学也有弹性力学方面的成果,数学有以布尔巴基学派为代表的成果,但这大多都与微积分原理无关,不要说现行微积分原理到了1854年才基本形成,即使有关,也大多不是微积分原理的功绩,因为,我们不可以想象一个有着许多根本性错误的微积分原理会推动科学进步。以微分方程理论为例,常微分方程是一切微分方程的基础,一般常微分方程经分离变量后可化为形如 $e(y) dy = f(x) dx$ 的形式,然后,两边积分,便得到通解 $E(y) = F(x) + C$ 。事实上,按照现行微分定义有 $\Delta z = e(y) \Delta y + o_1(\Delta y)$ 和 $\Delta z = f(x) \Delta x + o_2(\Delta x)$, 其中, $dz = e(y) \Delta y = e(y) dy$, $dz = f(x) \Delta x = f(x) dx$, 从而有 $e(y) dy = dz = f(x) dx$, 由于定义 $dx = \Delta x$, 所以 $f(x) dx$ 可以积出 $F(x) + C$, 而不能定义 $dy = \Delta y$, 因为 $\Delta y = g(x) \Delta x + o_g(\Delta x) \neq g(x) \Delta x = dy$, 所以 $e(y) dy$ 积不出 $E(y)$ 。这种自相矛盾的微分方程原理很难推动微分方程求解方法的进步。值得庆幸的是,在现行微积分原理中莱布尼兹的 dx 和 $\int$ 形式还得以保留,因此,隐藏在其背后的不为柯西、勒贝格等数学家所知的真正的微积分原理还不以人的意志为转移地发生着作用,否则,柯西和黎曼之后的科学是不可想象的。

另一方面,以柯西为代表的极限派不承认 $\frac{0}{0}$, 但庞加莱、李雅普诺夫、莫尔斯、托姆等的工作都是在 $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ [其中, $P(x, y) = Q(x, y) = 0$] 的基础上展开的。可以得出,现行微积分原理体系对科学发展的推动作用不大,有时甚至产生了一定的负面作用。

6 结论

综上所述,现行微积分原理是仍需要各位学者共同完善的微积分原理,也未能有效地解决自己应该解决的问题。我愿如王昆扬老先生所说的一样,加入这个向传统的束缚挑战的行列^[13],为推动微积分的发展不遗余力。

参考文献

- [1] 李文林. 数学史概论(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,2011.
- [2] 龚升,林立军. 简明微积分发展史[M]. 长沙:湖南教育出版社,2005.
- [3] 王昆扬. 关于Riemann积分理论的本质缺陷及以Lebesgue积分理论取代之的看法[J]. 数学教育学报,1999,8(3):95~98.
- [4] 王泽汉. 微积分的不足及其改革途径[J]. 哈尔滨工业大学学报,1992,24(3):99~102.
- [5] 米哈伊·列夫舍茨. 微积分的再思考[J]. 数学的实践与认识,2009,39(11):211~216.
- [6] 李清文. 关于极限和无限小的哲学思考——读马克思数学手稿的笔记[J]. 哈尔滨科学技术大学学报,1994,18(11):93~96.
- [7] 林群. 画中漫游微积分[M]. 广西师范大学出版社,1999.
- [8] 张筑生. 数学分析新讲[M]. 北京:北京大学出版社,2010.
- [9] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2002.