

新微积分原理的思考

丁小平

(北京二十一世纪药理学科学研究院 北京 100092)

中图分类号: G40-02

文献标识码: A

文章编号: 1672-7894(2011)36-0091-02

摘要 本文修正了实数和点的规定性,从而形成了作为数学前提的新的量—形模型;构造了以“变化”(Werden)为核心的微积分体系,并在此基础上重新定义了微分、导数、原函数和积分等概念,重新构造了微积分原理。

关键词 微分 导数 积分 量—形模型

Reflections on the New Principles of Calculus // Ding Xiaoping

Abstract In this paper a novel calculus system was established based on the concept of "warden". A new quantity-figure model as the premise of mathematics was formed after the correction of definition of the real number and the point. Basic concepts such as the derivative, the differential, the primitive function and the integral have been redefined and the principles of calculus have been reestablished.

Key words differential; derivative; integral; number-point model

Author's address Beijing 21th Pharmacology Science Institute, 100092, Beijing, China

1 引言

1665-1667年间,牛顿(Isaac Newton, 1643-1727)在家乡躲避瘟疫时建立了流数术和反流数术,即微积分。几乎同时,莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)通过对帕斯卡(Blaise Pascal, 1623-1662)四分之一圆周的研究建立了同样的一套方法^[1]。如果把1667年作为微积分诞生的年份的话,那么微积分理论建立到现在已经344年。

牛顿和莱布尼兹给我们提供的微积分方法,其应用的广泛性和有效性几乎是无与伦比的。然而,作为理论,牛顿和莱布尼兹的工作是不能自圆其说的^[1]。为此,达朗贝尔(D'Alembert, Jean Le Rond, 1717-1783)发展并引进了极限论,拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)、柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)、黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866)和魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897)等数学家也做了大量弥补性工作^[2-3],就这样,一座辉煌的微积分大厦终于建立起来了。后来,以达布(Darboux, Jean-Gaston, 1842-1917)和勒贝格(Henri Leon Lebesgue, 1875-1941)为代表的数学家又对大厦进行了最后的修饰,这部分工作被称为实变函数。这就是今天矗立在世人面前的微积分大厦。

本文在总结微积分原理已有的研究成果基础上,修正了实数和点的规定性,提出了新的量—形模型,构造了以“变化”(Werden)为基础的微分,并在此基础上重新定义了微分、导数、原函数和积分等概念,建立了一套新的微积分原理体系。

2 新的“量—形”模型简介

首先对现行实数理论和点的规定性做如下修正:两个相同的实数化为两个不同的实数要经过异—同过渡过程;同理,两个不同的实数化为两个相同的实数要经过同—异过渡过程;两个点自重合态进入分离态要经过分—合过渡态;同理,两个点自分离态进入重合态要经过合—分过渡过程。还规定:任何一个实数的有性扩张为0,而准有性扩张不为0;点的有性度量不为0,而准有性度量不为0。我们把修正后的实数理论和点的规定性作为新的量—形模型。

新的量—形模型与传统量—形模型的根本区别在于,新的量—形模型之下有数的异—同(同—异)过渡态和点的分—合(合—分)过渡态。正是因为有这样的过渡态,才产生真正意义的连续概念。可以定义:依前后秩序两两处于异—同(同—异)过渡态的数(或数组)构成的集合称作连续变

量,如果连续变量通过对应映射所构成的集合仍满足两两处于异—同(同—异)过渡态,则称这样的映射关系为连续函数。

一个量,不管是自变量还是因变量,自 x_0 变化到 x 形成增量 $\Delta x = x - x_0$,其变化状况无外乎如下三种情况:1)每次增加 Δx_i , Δx_i 为有限量,增加 n 次完成,于是 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \Delta x$; 2)每

次增加 δx_i , δx_i 为无穷小,增加 ∞ 次完成,于是 $\sum_{i=1}^{\infty} \delta x_i = \Delta x$;

3)每次增加的“量”比 δx_i 还小,其“量”为两个数(点)间处于异—同(分—合)过渡态的“差值”,这样一来,其增加的次数就比泛泛的 ∞ 还大,我们称之为超级巨大,用“ ∞ ”表示。如

果用 dx_i 表示任意一次增加的“量”,则 $x_i - x_{i-1} = dx_i$,于是 $\sum_{i=1}^{\infty} dx_i =$

Δx 。这三种情况分别等价于将 Δx 分成 n 份, ∞ 份和 ∞ 份,随着份数的增大,每份的度量也从可计量的有限量,减小为无法计量的无穷小,最后减小到极端状况,以至于从 Δx 的有性上看,其量已化为0,因为此时两个值(点)处于同一—异(合—分)过渡态。这种状态就是 δx_i 小到进入无—有过渡态,这时的 dx_i 是无与有相互转化的“度”,也叫“中介”,是无与有的对立统一,这种中介在Hegel的《逻辑学》中被称作“Werden”,作为Werden的 dx_i 既是无又是无,是有中的无和无中的有。一句话,是“准有”,只有准有才满足Werden的条件。准有,从有性上度量,其量为0,从无性上度量,其量为有。正是数或点的准有性,使得数或点的过渡态得以维系。对于传统量—形模型而言,由于不存在准有,因此,作为数,没有异—同(同—异)过渡态;作为点,要么两点重合,要么两点分开,没有分—合(合—分)过渡态。

Werden可译作“生成”或“消失”,我们可将二者统一为一个词——“变化”,这里的变化二字取自《黄帝内经》的“物之生谓之化,物之极谓之变”。“变化”(Werden)是无与有相互转化的中介,这种中介在数学上昭示出特有的微观解析几何关系。如图2-1,随着 Δx 趋向并等于 dx_i ,弧AB、割线AB和切线AC变化成“变化”(Werden)态——A、B两点进入合——分过渡态。即弧AB与割线AB以保留相对准有级还原因子 α 的形式与切线AC合一,也就是说各量(图形)自“度量尺寸的几何状态”进入“不度量尺寸的几何状态”——拓扑态,这也是“切代弧”

和“切代割”是精确演绎而非近似演绎的依据之所在。此时的微观关系如示意图2-2所示。A、B两点进入合—分过渡态, C点与B点重合,有:

$dy \equiv F(x+dx) - F(x) \equiv \{tg[\theta(x)] + \alpha(dx)\} dx \equiv [f'(x) + \alpha(dx)] dx \equiv f(x) dx + o(dx) = f(x) dx$ 。式中的“ $\equiv$ ”与“=”不同,是辩证等号,表示一个以上的有性量的相互转化和相等关系; $tg[\theta(x)]$ 表示 $F(x)$ 在 x_{i-1} 点的斜率函数; $\alpha(dx)$ 是 $tg[\theta(x)]$ 的相对准有级还原函数; $\rho(dx) = \alpha(dx) dx$ 称作 $F(x)$ 在 x_{i-1} 点处的相对准

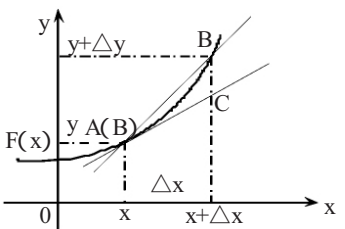


图2-1 几何示意图

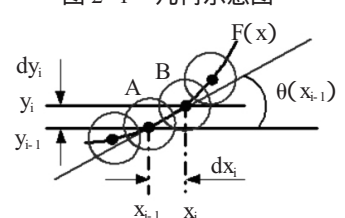


图2-2 微观关系示意图

(下转第108页)

科技文化 91

下降,共有 C_{2n}^n 种安排方法,不满足要求的方法就是折线与 $y=-1$ 有交点的地方。

如果折线与 $y=-1$ 有交点,就从左边第一个交点处将折线关于 $y=-1$ 对折,此时由 $(0,0)$ 到 $(2n,-2)$ 也共有 $2n$ 条折线。

设有 k_1 段下降,有 k_2 段上升,则 $k_1-k_2=2$,且 $k_1+k_2=2n$,

(上接第91页)

有级复原函数,它比 $f(x)$ 低一个表达式。

事实上,只要 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $U(x, \eta)$ 连续,就存在定理关系 $\Delta y = f(x) \Delta x + o(\Delta x)$ 。当 Δx 趋于并等于 dx 时,有 $dy \equiv f(x) dx + o(dx) = f(x) dx$ 。

3 新微分原理中微分、导数、原函数及积分

下面,介绍一下新微分原理中的微分、导数、原函数及积分等相关概念的定义及计算。

3.1 微分与导数的表达

对 $y=F(x)$ (对多元函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 同样采用此方法处理),如果在 $U(x, \eta)$ 内 $dy \equiv [f(x) + \alpha(dx)] dx \equiv f(x) dx + o(dx) = f(x) dx$ 成立,那么,定义 $dy \equiv [f(x) + \alpha(dx)] dx \equiv f(x) dx + o(dx)$ 为 $F(x)$ 的动微分函数,简称动微分,称 $dy = f(x) dx$ 为 $F(x)$ 的静微分函数,简称静微分。同时,定义 $F'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv f(x) + \alpha(dx)$ 为 $F(x)$ 的动导函数,简称动导数,称 $F'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x)$ 为静导函数,简称静导数。

针对一个具体的函数进行运算,给出实例。

例1 求 $y=x^3$ 的动、静微分和动、静导函数。

解:动微分 $dy \equiv (x+dx)^3 - x^3 \equiv 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 \equiv [3x^2 + 3x dx + (dx)^2] dx$

静微分 $dy = 3x^2 dx$

动导函数 $F'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv 3x^2 + 3x dx + (dx)^2$

静导函数 $F'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2$

通过例题可以清楚地看到动微分 $dy \equiv f(x) dx + o(dx)$ 和 $F'(x) \equiv f(x) + \alpha(dx)$ 动导数的结构,并且 $\alpha(dx) \equiv 3x(dx)^2 + (dx)^3$, $\alpha(dx) \equiv 3x dx + (dx)^2$ 。

3.2 原函数的表达

如果 $F'(x) \equiv f(x) + \alpha(dx)$ 或 $F'(x) = f(x)$,那么 $F(x) = r_x f(x) + C$ 叫做 $f(x)$ 的原函数族,简称原函数。其中 $r_x f(x)$ 称为原函数基, r 称为逆演绎符号,是“restore”的字头, r 称为逆演绎变量。 $r_x f(x)$ 是对传统不定积分的纠正,考虑到历史习惯,我们把 $\int f(x) dx$ 看做 $r_x f(x)$ 的习惯形式。

例2 求 $y = \sin^2 x$ 的原函数。

解 $r_x \sin^2 x = r_x \frac{1 - \cos 2x}{2} = r_x \frac{1}{2} - r_x \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} r_{2x} \cos 2x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \therefore F(x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

3.3 积分的表达

微分就是“变化”(Werden), Δx 的发生过程就是 $\sum_{i=1}^{\infty} dx_i$ Δx ,但如果把 Δx 作为起始状态,把 $dx_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x$ 看为微分 dx_i 的发生,那么 $\sum_{i=1}^{\infty} dx_i$ 就是微分的反过程,定义这个反演绎过程为积分。

对 $y=F(x)$ $F(x) - F(x_0) \equiv \Delta y \equiv \sum_{i=1}^{\infty} dy_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} [f(x_{i-1}) + \alpha(dx_i)]$

$$\text{即} \begin{cases} k_1 - k_2 = 2 \\ k_1 + k_2 = 2n \end{cases} \Rightarrow k_1 = n+1, k_2 = n-1,$$

此时共有 C_{2n}^{n+1} 种安排方法不满足要求。而总安排方法有

$$C_{2n}^n \text{ 种,故满足要求的方法数为 } C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

编辑 孙 静

$$dx_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} [f(x_{i-1}) dx_i + o(dy_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1}) dx_i$$

引进 $\sum$ 的等价符号 $\int_{x_0}^x$ 称 $\sum$ 为伪离散累加符号。称 $\int_{x_0}^x$

为连续累加符号,则上式化为 $F(x) - F(x_0) \equiv \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)]$

$dx = \int_{x_0}^x f(x) dx$,这就是 Newton-Leibniz 公式。式中 $\int_{x_0}^x$ 表示以 dx 为份额,将 $[f(x) + \alpha(dx)] dx$ 或 $f(x) dx$ 自 x_0 累加到 x ,其中 $f(x)$ 和 $\alpha(dx)$ 始终与自 x_0 起动的 x 同步。

对 Newton-Leibniz 公式两端求动、静微分:

$$D \left\{ \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx \right\} \equiv D[F(x) - F(x_0)] \equiv [f(x) + \alpha(dx)] dx$$

$$d \left\{ \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx \right\} = d[F(x) - F(x_0)] = f(x) dx$$

可见积分是动、静微分的逆演绎。

设 $x_0, x \in [a, b]$, $F(x)$ 和 $F'(x)$ 的静导数 $F'(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续,在 (x_0, x) 上任选 ℓ 个点, ℓ 为有限量,并令 $\omega = \omega - \ell$,于是:

$$\int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx \equiv \sum_{j=1}^{\infty} [f(x_{j-1}) + \alpha(dx_j)] dx_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} [f(x_{j-1}) \alpha(dx_j)] dx_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} [f(x_{j-1}) + \alpha(dx_j)] dx_j \equiv \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx \equiv \int_{x_0}^x f(x) dx$$

式中 $\sum_{j=1}^{\infty} [f(x_{j-1}) + \alpha(dx_j)] dx_j \equiv \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx$ 与

$\sum_{j=1}^{\infty} [f(x_{j-1}) + \alpha(dx_j)] dx_j \equiv \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx$ 在数量上相等,但

前者较后者缺少两个微级变化趋势 $\sum_{k=1}^{\ell} [f(x_{k-1}) + \alpha(dx_k)] dx_k$ 。

$\sum_{k=1}^{\ell} [f(x_{k-1}) + \alpha(dx_k)] dx_k$ 在 $f(x)$ 的有性上衡量其量为 0,因为

$\sum_{k=1}^{\ell}$ 是有限生长。它的几何意义是 ℓ 个线流形和 ℓ 个面流形的

发生趋势。我们称缺少 $\sum_{k=1}^{\ell} [f(x_{k-1}) + \alpha(dx_k)] dx_k$ 的 $\int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx$ 为次发生积分。

如果 $f(x)$ 在 (x_0, x) 内有 ℓ 个第一类间断点,但 $F(x)$ 在 $[x_0, x]$ 内连续或有可去间断点,那么,

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{x_0}^x [f(x) + \alpha(dx)] dx = \int_{x_0}^x \ell [f(x) + \alpha(dx)] dx = \int_{x_0}^x \ell f(x) dx = F(x) - F(x_0)$$

4 结论

综上所述,本文结论如下:

(1)修正了实数和点的规定性,从而形成了作为数学前提的新“量—形”模型;

(2)构造以“变化”(Werden)为核心的微积分体系,在此基础上重新构造了微积分原理。

参考文献

- [1] 李文林. 数学史概论(第3版)[M]. 北京:高等教育出版社,2011.
- [2] 龚升,林立军. 简明微积分发展史[M]. 长沙:湖南教育出版社,2005.
- [3] 卡尔·波耶. 微积分概念发展史[M]. 上海:复旦大学出版社,2011.

编辑 孙 静