

Cauchy-Lebesgue 微积分体系缺陷的思考

◎丁小平 (北京二十一世纪药理科学研究院 100083)

【摘要】系统地阐述了微积分原理的演化历史,发现 Cauchy-Lebesgue 微积分原理对优化微积分方法的应用意义不大.同时指出现行微积分原理体系中微分概念定义的缺陷.

【关键词】Cauchy-Lebesgue 微积分原理;微分

1665~1667年,牛顿在家乡躲避瘟疫期间,发明了微积分方法,并试图建立微积分原理.稍后,莱布尼茨也独立地开展了同样的研究.他们所建立的微积分方法是正确的,但是缺乏严密的逻辑论证,只能被看作是一种因天才般的直觉而产生的数学工具.为了解决这个微积分原理的论证问题,不少数学家做了重要的工作:达朗贝尔引进了“极限论”;欧拉、拉格朗日、柯西、卡尔·威尔斯特拉斯、黎曼等多位数学家也都做了创建性的工作;进入20世纪,又经过了达布和沃特拉等数学家的奠基性工作,勒贝格将传统微积分原理推向了新的高度.自此,国际数学界公认并宣布微积分理论完善.

尽管如此,微积分演化历史上所谓的“第二次数学危机”中的“0/0”,其后的微分定义、引入极限论后导数与积分的定义、病态函数积分等至今仍存在不少争议.本文系统地梳理了 Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系的演化历史,重点论述了该原理体系中微分定义的缺陷及其对该理论体系的影响.

1. Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系演化历史

微积分早期演化的一条主线是自柏拉图、经阿基米德、伽利略、卡瓦列里和巴罗的量变积累,到牛顿发生根本质变,形成了运动学特征的微积分;另一条主线是自德谟克利特、开普勒、费马、帕斯卡和惠更斯的量变积累过程,到莱布尼茨发生根本性质变,形成了原子论性质的微积分. I. Newton 在 1665~1667 年间所做的工作和 G. Leibniz 在 1672~1676 年间所做的工作就分别是这两条主线上的各自的质变.它们是微积分演化史上不朽的里程碑.以此为标志,我们称以前的微积分演化历程为微积分演化史的第一历史阶段,称此后到 1821 年为微积分演化的第二历史阶段.

微积分演化的第二个历史阶段,不仅是微积分演化史中最辉煌的历史阶段,也是整个科学发展史中最辉煌的历史阶段之一.在这个历史阶段中,不仅形成了被恩格斯誉为“人类精神最高胜利”的本初微积分,而且还形成了微积分的各分支科学和以微积分方法为工具的众多门科学.

微积分演化的第三个历史阶段从 1821 年至今.第三个历史阶段又可分为上叶和下叶,其分期在 1850 年前后,标志是 Dirichlet 函数、Weierstrass 函数、Thomae 函数和 Volterra 函数等的构造. Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系指的就是微积分演化历史的第三个阶段. 1821 年, A-L. Cauchy 出版了《分析教程》, 1823 年,又出版了《无限小计算教程概论》.这两部著作建立了极限理论,并以此为工具建立了全新的微积分原理,以这两部划时代的著作作为标志,微积分演化史进入了第三个历史阶段的上叶.进入微积分演化史的第三个历史阶段的下叶, V. Volterra, L. Bell 和 H. Lebesgue 等多位数学家,尤其是 Lebesgue 集前人之智慧,用 G. Cantor 的集合论解决了怪异函数的可积性问题,并建立了 Lebesgue 积分,其标志是其 1902 年撰写的博士论文《积分、长度和面积》.从此,实变函数和现代分析建立起来,数学界公认并宣布微积分完善.

应该指出的是,在微积分的第三个历史时期,科学虽有重大突破,但不是微积分的功绩,比如,相对论、量子力学、基因工程、计算机工程等.除将分析引入复数领域外,微积分的分支学科和以微积分为支撑的自然科学发展得很有限.最有说服力的是科学家 S. Poisson 的科研实践, Poisson 在积分理论、行星运行理论、热物理、弹性理论和概率论领域都作出了重要贡献.泊松在其《力学论著》中大量使用无穷小法,他认为这些量“小于任何同类性质的给定量”,是真实存在的,而不仅仅是“几何学家想象的一种研究方法”.按理说,有了“严格分析奠基者”Cauchy 和“现代分析之父”Weierstrass 建立起的严密而完整的微积分,微积分分支学科和相关学科的发展应该远远超过前一个时期,可科学实践证明答案并不是这样.相反,科学实践一再证明,以“直”代“曲”的推演和计算是精确的(而非近似的);科学实践一再证明,积分是微分的直接累加(根本不需再求极限).

2. Cauchy-Lebesgue 微积分原理中微分定义的缺陷

Cauchy 承认 Leibniz 在 1676~1677 年间给出的 $dx^e = ex^{e-1}dx$, $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1}$ 和 $\int_a^b y dx = Z(b) - Z(a)$, 但不理解 Leibniz 关于微分 dx 和 dy 的解释. Leibniz 说:“…… dx 表示两相邻 x 的差……相当于欧几里得的接触角,比任何给定的量都小,但又不是绝对的 0,是相对的 0.”在把 Leibniz 的箴言误作呓语的同时, Cauchy 决定另起炉灶,因为极限的思想和方法已经让他看到“光明”.在 Cauchy 的心目中,微分无非有三种可能性:是 0 到 ∞ 之间的量,是 ∞ . Cauchy 首

先排除了0和 ∞ 的两种可能,于是微分只可能是有限量(包括极小的有限量).在极限方法的贯通下, Cauchy 认为自己完成了正确的微积分原理的构建,只是统一微分定义中的 $dy=f(x)\Delta x$ 成 $dy=f(x)dx$ 还有困难.然而,在 Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系中,“微分”的定义,其上承“导数”,下启“积分”.因此,如果“微分”定义的不恰当,则“导数”和“积分”必然遭到影响,势必导致微积分原理的结构变得支离破碎,在逻辑上自相矛盾.

按照 Cauchy-Lebesgue 微积分原理,定义 $\Delta y=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 的线性主部 $f(x)\Delta x$ 为“微分”.为了凑出能够“承上启下”的“ $dy=f(x)dx$ 形式”,现行的微积分原理又“强行约定”出了两个前提:其一,强行认为“ x 的微分”就是“ $y=x$ 的微分”;其二,强行定义“ $dy=\Delta y$ ”.基于这两种强行约定, $dy=f(x)\Delta x$ 就变成了 $dy=f(x)dx$.

事实上 dx 不可能等于 Δx ,因为微分(不管是 dy, dx 抑或其他)已经被定义作增量(不管是 $\Delta y, \Delta x$ 抑或其他)的线性主部.也就是说对任意可微的 $z=E(y), y=F(x), x=G(t)$,总有 $\Delta z=e(y)\Delta y+o_E(\Delta y), \Delta y=f(x)\Delta x+o_F(\Delta x), \Delta x=g(t)\Delta t+o_G(\Delta t)$,即 $\Delta z\neq dz, \Delta y\neq dy, \Delta x\neq dx$.可是,在美好的前景的诱惑下, Cauchy 终于下定决心采用非数学的手段统一 $dy=f(x)\Delta x$ 和 $dy=f(x)dx$.这便是第三个历史时期的微积分原理,加上传统的微积分方法,这便构成了第三个历史时期的微积分.

现行微积分原理,即 Cauchy-Lebesgue 体系,就是一个在承上启下的核心问题上采用非数学手段的一个微积分原理.对可微函数 $y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 而言,它的手段为两种:第一,强行认为(or:约定) $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的微分就是 y 同时分别等于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的微分,其中 n 为1或任意有限的自然数;第二,强行定义 $dx_1=\Delta x_1, dx_2=\Delta x_2, \dots, dx_n=\Delta x_n$,其中 n 为1或任意有限的自然数.对如上两种做法, Cauchy-Lebesgue 体系内的数学家没有拿出任何令人信服的依据.

从立论的角度说, Cauchy 已经将微分(dy, dx 或其他符号)定义作增量($\Delta y, \Delta x$ 或其他符号)的线性主部,因此,不可再同时定义微分就是增量自身.另一方面,可微函数 $y_i=F_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ 已经规定了 y_i 与 x_j 的一般关系,不可再认为 y_i 同时等于 $x_1, x_2, \dots, x_n$,即荒唐的 $y_i=x_1=x_2=\dots=x_j=\dots=x_n$,结果把一般的 n 元函数变成了一元函数.事实上,定义 $dx_j=\Delta x_j$ 与认为 x_j 的微分就是 $y_i=x_j$ 的微分等价.前者错,后者也错;后者错,前者也错.总之,这两种方法都是错的.

从驳论的角度说,对一般可微函数 $z_h=E_h(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m), y_i=F_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), x_j=G_j(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_\rho)$,有 $\Delta z_h=\sum_{i=1}^m \frac{\partial E_h}{\partial y_i} \Delta y_i+o_h(\rho_h), \Delta y_i=\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta x_j+o_i(\rho_i), \Delta x_j=\sum_{k=1}^\rho \frac{\partial G_j}{\partial t_k} \Delta t_k+o_j(\rho_j)=dx_j+o_j(\rho_j)$.因此,一般说来,

$dz_h\neq \Delta z_h, dy_i\neq \Delta y_i, dx_j\neq \Delta x_j$.由于等价关系,一般说来,也不可以认为 $z_h=y_i(i=1, \dots, m), y_i=x_j(j=1, \dots, n), x_j=t_k(k=1, \dots, \rho)$.

如上两种偷换概念的做法在 Cauchy-Lebesgue 体系的微积分原理中是具有代表性的做法,这是科学所不允许的.然而, Cauchy-Lebesgue 体系的捍卫者却反驳说“数学仅仅是一个形式体系,它不是一个物理体系, Cauchy 的微分定义不面对复合函数,因此, Cauchy-Lebesgue 体系是无懈可击的.”如果是这样,微分的不变性是不是针对复合函数而言的?复合函数求导又是针对什么?没有复合函数思想,隐函数形式、参数方程形式和极坐标形式的求导又如何解释?不定积分的两类换元法还有成立的依据吗?微分方程中的变量替换方法如何解释?事实上,即使是 Cauchy-Lebesgue 流派的数学工作者,也有发现其错误并悄悄做改动的,但改动后仍存在一些问题;还有就干脆回避微分的.这至少说明,很多数学家在此问题上也存在困惑,但是他们没有直接把困惑说出来,而是变相的修改.

3. 结论

(1) Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系对优化和推动微积分方法的应用意义有限.

(2) Cauchy-Lebesgue 微积分原理体系中微分的定义存在缺陷.

【参考文献】

- [1] 李文林. 数学史概论. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [2] William Dunham. 微积分的历程——从牛顿到勒贝格. 北京: 人民邮电出版社, 2010.
- [3] 辛钦. 数学分析八讲. 北京: 人民邮电出版社, 2010.
- [4] 同济大学数学教研室编. 高等数学. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [5] 张筑生. 数学分析新讲. 北京: 北京大学出版社, 1990.
- [6] T. M. 菲赫金哥尔茨. 微分学教程. 北京: 高等教育出版社, 1980.
- [7] C. M. 尼柯尔斯基. 数学分析教程. 北京: 人民教育出版社, 2006.
- [8] Г. И. 阿黑波夫, 萨多夫尼奇, 丘巴里阔夫. 数学分析讲义. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [9] B. A. 卓里奇. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [10] A. И. 卡尔塔谢夫. 数学分析. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社.
- [11] James Staward. Calculus. 北京: 中国人民大学出版社, 2010.
- [12] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis. 北京: 机械工业出版社, 2011.