

建议与商榷

浅谈现行微积分原理的错误

◆ 丁小平

(接引寺,浙江 365500)

摘 要: I. Newton 和 G. Leibniz 各自的微积分原理是难以自圆其说的,于是,以 A-L. Cauchy 为首的数学家建立了现行微积分原理。现行微积分原理也是一个似是而非的体系,本文从四个方面进行简要地说明。

关键词: 微积分原理;数-形模型;实数

中图分类号: O172 文献标识码: A

1 引言

实变函数论和现代分析建立之后,数学界宣布微积分原理为完整而严密的科学体系,而事实上完全不是这么回事。我不是持这种观点的第一人,在持此观点的人中, A. Robinson 和 K. Gödel 应该说是杰出代表, Gödel 说:“以这种或那种形式表示的非标准分析,将成为未来的分析学。”^[1] Robinson 说:“本书证明了 Leibniz 的思想能够全面维护。”^[2]又说:“有一个鲜明的对照:对 Leibniz 及其追随者,给以严格的待遇,而对极限学说的发起者的错误却予以谅解。”^[3]

事实上,不仅现行微积分原理的科学性是似是而非的,就连整个现行数学基础都无法自圆其说。既然笔者敢出此言,那么,笔者就接受一切质询。本文先从现行微积分原理的错误说起。

2 现行微积分原理的错误

稍微有一点微积分史常识的人都知道,对于整个微积分学科而言,是先有微积分方法,后有微积分原理。微积分方法越是空前地行之有效,人们就越想破解隐藏在其背后的机理——微积分原理。

任何行之有效的东西,其背后都一定存在着不以人们意志为转移的客观机理,微积分方法也不例外。作为完整而严密的科学体系的微积分原理没有建立起来,其原因在于现行数学科学的数-形模型描述不了微积分原理,而非先贤之过,也非现行数学工作者之过。

在现行数-形模型之下,建立微积分原理的根本困难在于处理 $\Delta y/\Delta x = f(x) + o(x, \Delta x)$ 中的 $o(x, \Delta x)$ 。若去除 $o(x, \Delta x)$, $f(x)$ 就可以写成微商,但是,积分与微分(或者导数)相互沟通

收稿日期:2015-12-01 修订日期:2015-12-21

作者简介:丁小平(1962-),男,1986级清华大学工学硕士研究生,1988级北京大学理学硕士研究生,1988级中央民族大学哲学硕士研究生。1984年至今一直从事高等教育和科学研究工作。E-mail: mathchina@yeah.net

的桥梁就不存在了；若保留 $o(x, \Delta x)$ ， $f(x)$ 就无法写作微商，Leibniz 形式的积分也就无从谈起。借助于极限，可以把 $o(x, \Delta x)$ 处理掉，可是， $f(x)$ 仍无法写作微商。于是，以 Cauchy 为首的数学家便粗暴地采取非科学的手段，微积分原理的种种荒唐都源于此。

2.1 现行微分与导数原理的错误

1、强行定义 $dx = \Delta x$ ，于是， $dy = f(x_0)\Delta x$ 就变成了 $dy = f(x_0)dx$ ，因此，也就有了 $f(x_0) = \frac{dy}{dx}$ ，这样，就得到了微商形式。

2、做自欺欺人的演绎：对 $y = x$ ，有 $dy = F'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ 。∵ $y = x$ ，∴ $dy = dx$ ，因此有 $dx = \Delta x$ ，从而得到 $f(x_0) = \frac{dy}{dx}$ 。

3、做单位映射，然后得到 $f(x_0) = \frac{dy}{dx}$ ，这与前述 $y = x$ 情形等价。

对于这三种做法人们不免要问：

1、凭什么强行定义 $dx = \Delta x$ ？依据何在？

2、对于特殊的 $y = x$ ，有 $dx = \Delta x$ ；对于一般的 $y = F(x)$ ，还有 $dx = \Delta x$ 吗？

3、在单位映射情形下， $dx = \Delta x$ ；在非单位映射情形下，还有 $dx = \Delta x$ 吗？

一般说来，对 $y = F(x)$ 来说， x 是原因， y 是结果，同时， y 又是它的结果的原因， x 又是它的原因的结果，这种关系无始无终，我们的世界就是这样，其反映到数学上就是 $z = E(y)$ 、 $y = F(x)$ 、 $x = G(t)$ 。因此，除非 $x = t$ ，否则就得承认

$\Delta x = g(t_0)\Delta t + o_g(\Delta t) = dx + o_g(\Delta t)$ ，因此， $\Delta x \neq dx$ 。有人说 x 是原始变量，因此，永远有 $x = t$ ，所以 $dx = \Delta x$ 。我们请问：隐函数的导数怎么处理的？参数方程的导数怎么处理的？不定

积分的第二类换元法怎么处理的？

如上讲的还是一元状况，对于多元微积分则更是令人啼笑皆非。“设 m 元函数 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 在点 $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ 邻近有定义，如果存在 $A_i \in R, i = 1, \dots, m$ ，使得对于充分小的 $\Delta x = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^m)$ ，有这样的关系

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i + o(\|\Delta x\|),$$

我们就说函数 f 在点 x_0 可微，并把 $\sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i$ 叫做函数在点 x_0 的全微分，记为

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i = \sum_{i=1}^m A_i dx^i,$$

这里我们约定 $\Delta x^i = dx^i, i = 1, \dots, m$ ”。^[4]事实上，只要把

函数 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 的各变元 x^i ，都换成依赖于变元 $t = (t^1, \dots, t^k)$ 的可微函数， $x^i = x^i(t) = x^i(t^1, \dots, t^k), i = 1, \dots, m$ ，那么，

根据复合函数求导的链式法则有

$$\frac{\partial}{\partial t^j} (f(x^1(t), \dots, x^m(t))) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} (x(t)) \cdot \frac{\partial x^i(t)}{\partial t^j}, j = 1, \dots, k$$

在这里， $dx^i \neq \Delta x^i$ 。因此，约定或者强行定义 $\Delta x^i = dx^i$ 都是荒唐的。如果采取所谓的“Cauchy 式演绎”就得分别令 $x = x^i$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, m$ ，这样，就有 $x = x^1 = x^2 = \dots = x^m$ ，如此这般，本来的多元函数又变成了不伦不类的一元函数，这显然是荒唐的。

纵观柯西以来的微积分原理书籍，在微分的讲述上，可谓五花八门，但是，有一点可以肯定，那就是作者都绞尽脑汁去圆微积分原理之说，就连斯米尔诺夫院士都如此^[5]，可是，没有一位能够圆了其说。不知这是否可以给坚持“柯西教”教徒们提个醒？

一句话，现行微积分原理成立的前提是，导数自变量的增量自身永远等于这个增量的线性部

分, 不管这个增量按照线性关系增长还是按照非线性关系增长。这个前提成立吗?

2.2 现行积分原理中的问题

在以 Cauchy 为首的数学家所建立的现行微积分原理中, 第一, 微分要通过导数违反科学原则地加以定义, 而导数又不是两个即时量的比值, 反倒是通过求增量、算比值和取极限这样的兜圈子方式取得。通过强行定义, 导数又是 dy 和 dx 比值了, 可 dy 和 dx 又不是即时量。第二, 不定积分与定积分不是统一的积分, 定积分是个和式的极限, 而不定积分一会儿是导数的逆过程, 一会儿又是微分的逆过程, 定积分只不过借助于不定积分来算而已。这样的做法合理吗?

1677 年 Leibniz 阐明: “给定一条曲线, 其纵坐标为 y , 求该曲线下的面积。Leibniz 假定可以求出一条曲线 (割圆曲线), 其纵坐标为 z , 使得 $\frac{dz}{dx} = y$, 即 $ydx = dz$, 于是原曲线下的面积是: $\int ydx = \int dz = z$ ”^[6], 写成规范形式, 即 “ $\int_a^b ydx = z(b) - z(a)$ ”^[7]。如果 b 为任意数 x , 得到的就是原函数。当然, 这里还需注意的是, “ $\int$ ” 只表示最简单的累加, 与 Cauchy 的 “ $\int$ ” 完全不是一回事。

在 Leibniz 微积分原理中, “ d ” 表示微分, “ dx 表示两相邻 x 的差, 并探索 $\int$ 和 d 的运算关系。”^[6] 也就是说, 微分就是对某区间的点级微化, 积分是对点级微化结果的累加, 微分与积分互为逆运算, 并不存在本质不同的两个积分, 导数就是微商。这就是真正的微积分基本原理。

对比两者, 不难发现, 以 Cauchy 为代表的现行微积分原理还不构成说得通的原理。之所以这么说, 是因为所谓原理就是反映该事物内在联系的前后衔接的规律组, 在特殊情形下, 是单一规律。而微积分原理就是阐释微积分方法内在联

系的前后衔接的规律体系。

第一, 在以 Cauchy 为代表的现行微积分原理中, 不定积分只是用定义复述了微积分方法中的原函数处理方法, 并没有揭示微分乃至导数与积分之间的内在联系, 而且还把本来是同一个事物的两个方面——不定积分和定积分弄成两个事物。如果说有联系的话, 也只不过是后者借助于前者计算。

第二, 在以 Cauchy 为代表的现行微积分原理中, 虽然也承认导函数或导数是即时变化率, 导函数或导数是微商, 但微分却不是即时量, 从而, 也就没有即时量比的即时变化率, 而有的只是, 求增量、算比值和取极限的即时变化率。因此, 积分就无法是微分的逆过程, 从而, 微分也只不过是个横空出世的怪物, 其所谓的用途, 也只不过用于精度比级数方法低得多的近似计算。

第三, 诚如人们所熟知, 所谓微分方程大多都是导数方程。其求解过程大多要经过分离变量, 即微分化的方法, 然后, 再两端积分。这个行之有效的方法告诉人们的最基本道理是积分是微分的逆过程。不要忘记, “两端积分” 是对微分的两端积分啊! 这是 Leibniz 意义的积分, 而 Cauchy 意义的积分只是导函数的逆过程。可见, 以 Cauchy 为代表的现行积分原理也没有揭示微分方程的内在联系, 至多是似是而非的残缺的内在联系。

2.3 微分方程求解原理的错误

常微分方程经分离变量后化为 $h'(y)dy = g'(x)dx$ 形式, 然后, 两端积分 (注意, 这里的两端积分与 Cauchy 不定积分已经不是一回事了), 这样, 就得到通解: $h(y) = g(x) + C$, 可较起真来就不是这样了。原方程确定了 $y = F(x)$ 的函数关系, 并且, 其原理方程可写作 $h'(y)dy = dz = g'(x)dx$ 。如果承认

$dx = \Delta x$, 那么 , $dz = g'(x)dx$ 可以积出 $g(x) + C$, 可是 , $h'(y)dy$ 就积不出 $h(y)$ 。因为 , 按照微分定义 dy 是 $\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ 的线性主部 $f(x)\Delta x = f(x)dx$; 同理 , $\Delta z = h'(y)\Delta y + o_1(\Delta y)$, 于是 , $dz = h'(y)\Delta y$, 即 $\frac{dz}{\Delta y} = h'(y)$, 而 $dy = f(x)\Delta x \neq \Delta y$, 因此 , $\frac{dz}{dy} \neq h'(y) = \frac{dz}{\Delta y}$, 所以 , $h'(y)dy$ 积不出 $h(y)$ 来。

当然 , 有人说不定积分也是微分的逆过程 , 导数和微分的逆过程都是 $F(x) + C$, 因为 , “柯西提出这样一个事实 , 即尽管两个运算的定义彼此独立 , 然而 , 积分在这个意义上却是微分的逆过程。”^[9] 不 ! 导数和微分的逆过程的结果可以都是 $F(x) + C$, 但是 , 逆过程自身 $\int f(x)dx$ 只能导数和微分的二者之一 , 因为导数和微分不是等同类的事物。如果 $\int f(x)dx$ 是微分的逆过程 , 就有 $\int f(x)dx = \int dF(x) = \int dy$, 那么 , 在用第二类换元法积分时 , 按照微分的根本定义 $dy = f(x)\Delta x$ 就有 $\int dy = \int f(x)\Delta x = \int f(x)[\varphi'(t)\Delta t + o(t, \Delta t)\Delta t]$, 其中 $\Delta x = \varphi'(t)\Delta t + o(t, \Delta t)\Delta t$, 其线性主部 , 即微分为 $dx = \varphi'(t)\Delta t$, 从而 $\int f(x)dx = \int dy = \int f(x)\Delta x = \int f(x)dx + \int f(x)o(t, \Delta t)\Delta t$ 这显然是荒唐的。

为何理论上混乱的原理却可以得到正确的结果 ? 这是因为 $dz = h'(y)dy$ 的形式确实是正确的 , 只不过这里的 dy 与 dz 和其对应的微分定义与现行微积分中的相应定义和原理不同。试想 , 在以 Cauchy 为代表的现行积分原理中 , 不定积分就是求导函数的逆过程 , 可面对导数方程时 , 这样的不定积分却无能为力 , 反倒要先微分化 , 再进行 Leibniz 意义的积分 , 这本身就荒唐。

2.4 现行微积分原理的结构扭曲

现行微积分原理不仅在一元阶段结构扭曲 , 而在一元向多元的演化过程中同样结构扭曲。作为完整的微积分原理 , 它必须从一元贯穿到多元 , 还要从一阶走向高阶。

重积分、曲线积分和曲面积分虽说也是多变量积分 , 但不是标准的多元积分 , 而是特种积分。下面 , 以三元函数为例加以说明 :

对 $u = u(x, y, z)$,

其全微分为 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$,

其多元不定积分为

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) ,$$

即多元原函数。

严格地说 , 曲线积分并不是多元不定积分 , 其与路径无关的情况另当别论。

高阶积分 $\iiint f(x)dx dx dx$ 与多重积分 $\iiint f(x, y, z)dx dy dz$ 是截然不同的两个概念。高阶积分是相对于高阶微分 (按现行微积分原理是阶数) 而言的逆过程 , 而多重积分的本质是多次单重积分。如果从几何角度划分 , 多重积分应该是继曲线积分和曲面积分之后的曲体积分。

现行微积分原理不仅没有分清一般和特殊 , 即使特殊也只讲了定积分 (恰当方程仅是特例) , 而科学的微积分是要求多元原函数的 , 求和问题不过是原函数问题的具体应用而已。现行微积分为了展示斯托克斯公式 , 顺便讲了全微分求原函数 , 这总算是可喜的 , 可是 , 又把主从关系颠倒了。

对 $u = u(x, y, z)$, 如果其偏导数存在且连续 , 那么 , 其混合偏导数与求导顺序无关 , 并且其全微分可积 , 即 :

$$u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz ,$$

亦即 $u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) = \lim \sum du_i$, 其与累加顺序无关, 因此, 自 (x_0, y_0, z_0) 至 (x, y, z) 的积分与路径无关。

对于 $[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$, 如果它们是 $u(x, y, z)$ 的全微分, 则必有 $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, 并且, 其偏导数存在且连续, 于是, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 、 $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 、 $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ 、 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, 从而, 有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, 从而, 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx = 0$ 就顺理成章了。

一般说来, 随便凑出的 $Pdx + Qdy + Rdz$ 未必是某函数的全微分。如果不是, 它就不存在多元原函数。所谓的积分路径, 不过是 $x = \phi(t)$ 、 $y = \psi(t)$ 、 $z = \eta(t)$, 其本质是化三元函数为一元函数。因此, 也就把三元不可积积分化为一元可积定积分, 不同的 x 、 y 、 z 关系当然也就可以积出不同的数。这就是积分与路径相关的内在原因, 这与求多元原函数完全是两码事。

通过如上的简单分析, 不难发现, 现行微积分原理的结构是不合理的, 进入多元和高阶后, 关系也表现为相对混乱。

3 结语

Newton 在 1687 年出版《自然哲学的数学原理》, 目的在于与 Leibniz 争夺微积分的“第一发现者”^[10]。如果 Newton 本人承认自己的微积分原理完善, 他就不会拖到 1687 年才出版。相

反, Leibniz 之所以敢于发表自己的发现, 是因为他对自己的工作是有信心的, 当然, 这不需要不把诸如“相对的 0”^[11]这样的话当作疯话, 也需要把 Leibniz 的微积分原理放到当时的“实数理论”环境下加以理解。诚如 Gödel 所预见的, 业已重建的新微积分原理证明 Leibniz 的思路是完全正确的。

即使不用严格而简明的与 Leibniz 思路相一致的微积分原理来要求, 存在如上所列错误的现行微积分原理也不应该为数学所接受。因为这样的微积分原理不但没有为微积分方法的进步提供助推, 反倒影响了微积分方法的进步。一句话, 这样的微积分原理已经失去了微积分原理应有的意义了。■

●参考文献

- [1] 鲁宾逊, 非标准分析, 科学出版社, 1980:iv.
- [2] 鲁宾逊, 非标准分析, 科学出版社, 1980:2.
- [3] 鲁宾逊, 非标准分析, 科学出版社, 1980:303.
- [4] 张筑生, 数学分析新讲(第二册), 北京大学出版社, 1990:204-205.
- [5] 斯米尔诺夫, 高等数学(第二版)(第一卷), 人民教育出版社, 1959:108.
- [6] 李文林, 数学史概论, 高等教育出版社, 2002:170.
- [7] 李文林, 数学史概论, 高等教育出版社, 2002:170.
- [8] 李文林, 数学史概论, 高等教育出版社, 2002:169.
- [9] Saks, Théorie de l'intégral. 转引自(美)波耶, 微积分概念发展史, 复旦大学出版社, 2007:122.
- [10] 武际可, 力学史杂谈, 高等教育出版社, 2009:36.
- [11] (美)波耶, 微积分概念发展史, 复旦大学出版社, 2007:212.

推荐语:

我向贵刊推荐丁小平论文,是基于以下考虑。在微积分基础上建立起来的分析数学,是简单性科学的有力工具,但对复杂性研究无济于事,复杂性科学需要新数学。而新数学是什么,现在还说不来。钱学森曾说自己“就不敢告诉您是什么数学理论”。数学创新需要大胆探索,包括对现有理论的挑战,从其漏洞中找出路。Robinson的非标准分析是对现有分析数学的一次挑战,丁小平的工作是又一次挑战,有新意。在中央大力推动

创新的今天,希望贵刊支持他的探索,尽早发表论文,以期学界讨论。

推荐人:苗东升

苗东升,1960年北京师范大学数学系毕业,曾任北京化工大学数学教授、中国人民大学自然辩证法教授,现任北京大学现代科学与哲学研究中心特聘专家,出版《模糊数学导引》、《系统学大学讲稿》、《系统学精要》和《复杂性科学纵横论》等专著十多部,发表学术论文200多篇。

A Brief Discussion on Mistakes in Current Principles of Calculus

Ding Xiaoping

(Jieyin Temple, Zhejiang 365500)

Abstract: I. Newton' s and G. Leibniz' s principles of calculus cannot justify themselves. Therefore, headed by A-L. Cauchy, mathematicians founded the current principles of calculus. However, the current system of calculus principles is a specious one, which will be briefly explained in this thesis from four aspects.

Key words: Principles of Calculus; Number-figure Model; Real Numbers