

略论作为微积分原理的完善的实变函数

◆丁小平

(接引寺,浙江 365500)

摘要:针对实变函数的相关问题,本文以通俗而简明的方式列举了实变函数理论中存在的循环论证等几处误解,从而证明实变函数理论作为现行微积分原理已完善的论据是不充分的。

关键词:实数;数-形模型;康托定理;测度

中图分类号:O172

文献标识码:A

1 引言

就微积分原理的发展历程而言,发生过两次危机。第一次危机可以简称为贝克莱“鬼魂”^[1]问题;第二次危机可以简称为“病态函数”问题。就定论的微积分发展史而言,不管是 Carl B. Boyer 的《微积分概念发展史》,还是 William Dunham 的《微积分历程》,都一致认为以 A-L. Cauchy(1789-1857)为代表的大数学家解决了微积分原理的第一次危机,以 G. Cantor(1845-1918)、R. Baire (1874-1932)和 H. Lebesgue(1875-1941)为代表的大数学家解决了微积分原理的第二次危机。并且以 Lebesgue 在 1904 年发表《积分:长度和面积》为标志,数学界宣布现行微积分原理成为严密而完整的体系。事实上不然。

仅就从应用角度看微积分,有 G. Leibniz(1646-1716)不彻底的微积分原理就可

以了,不会影响微积分方法应用于具体科学和技术问题的。然而,人类为什么一定要建立科学的微积分原理呢?这是因为人类总要弄清楚这个来源于近似而得出结果却精确的方法能放之四海而皆准的个中原因?还有,人类还要借助于这个原理发现更多微积分方法。应该说 Cauchy 想解决这个问题,可事实上并没有解决。

Cauchy 的所谓微积分原理,即现行微积分原理,就是在无奈时拼接了一点儿莱布尼兹的微分的极限化的 I. Newton(1642-1727)的“微积分原理”。牛顿的 p_0/q_0 一经取极限,就再也拆不开了。因此,也就解释不了如今这样丰富的微积分方法,尤其是微分方程的一般解法。正是由于这个原因, Cauchy 不得不拼接莱布尼兹的微分,以实现导数的微商形式。然而,错误也就因此而发生,见《现行微积分原理的错误》^[2]一文。

对“病态函数”的研究,以 Cauchy 为代表的微积分原理遭到第二次怀疑,以 Cantor、

收稿日期:2016-11-01 修订日期:2016-12-12

作者简介:丁小平(1962-)男,1986级清华大学工学硕士研究生,1988级北京大学理学硕士研究生和中央民族大学哲学硕士研究生。1984年至今一直从事高等教育和科学研究工作。E-mail: mathchina@yeah.net

Baire 和 Lebesgue 为代表的大数学家被认为解决了这第二次危机, 并且这些工作的总括称作实变函数理论。事实上不然, 实变函数理论大多是错的。

不管 Newton、Leibniz、Cauchy 还是其他人, 都建立不起 Leibniz 意义的微积分原理, 原因在于现行数学的数-形模型没有瞬时量。因为导数是两个瞬时量的比, 即所谓瞬时变化率。极限可以蹩脚地说明瞬时变化率的存在, 但是, 没有瞬时量就没有瞬时量比的表达形式。

通过重新构造数学的数-形模型, 我们可以重建微积分原理。这个微积分原理极其简单易学, 它与罗宾逊的《非标准分析》一样, “证明了 Leibniz 的思想能够全面维护。”^[3]

2 实变函数理论中的种种问题

人们总希望科学领域能成为一片远离集团斗争的净土, 可是, 事实上绝不是这样, 不仅学术上也存在“冒着被责骂的危险”^[4], 更严重的是学术观点的当政和在野往往与持此种观点的人们的政治地位与经济地位相联系, “数学家也是人, 也要吃饭、穿衣”^[5]。因此, 这就不可避免地导致学术观点辩论转化为学术集团的斗争。Newton^[6]、Cauchy(1789-1857)^[7]和柯西派的很多人不是这样吗?

我们与传统数学之争, 已经不仅是科学与科学之争, 而且还是科学与“数学教”之争。我们都知道, 高度抽象的数学语言是不能做思想工作的。以下将采用白话的形式阐述现行实变函数理论中的问题。

2.1 循环论证

现行数学声称, 实数理论是严密而完整的, 因为它以科学的极限理论为依托; 极限论的科学性是不容置疑的, 因为它以严密而完整的

实数理论为前提。当然, 这是在两个场合说的, 一旦放到一处, 循环论证的荒唐便显而易见了。

在 K. Weierstrass (1815-1897) 之后, 1872 年, Dedekind、Cantor、C. Méray (1835-1911) 和 H. Heine (1821-1881) 几乎同时发表了他们各自的实数理论, 其中, “戴德金处理这个问题的途径与维尔斯特拉斯、梅雷、海涅和康托尔的略有差别, 因为他不考虑以什么方式定义无理数以避开柯西的恶性循环”^[8], 也就是说, Dedekind 实数构造方法——戴德金分割法是有别于后面三位的。有人曾以“戴德金分割”没用极限论为由说明如上循环论证不存在, 事实真的如此吗?

Dedekind 是这样构造无理数的: “把有理数分为两类, 使第一类 A 的每一个数都小于第二类 B 的每一个数, 那么就有一个且只有一个实数可以产生这个分割, 或曰‘戴德金分割’。因此, 如果我们将有理数分成 A、B 两类, 使 A 包含平方小于 2 的所有数, B 类包含平方大于 2 的所有数, 那么, 根据连续性公理, 就只有唯一一个实数产生这个分割, 在这里写作 $\sqrt{2}$ 。”^[9]戴德金说: “每当我们考虑一个不是由有理数产生的分割 (A_1, A_2) 时, 就得到一个新数即无理数 a , 我们认为这个数是由分割 (A_1, A_2) 完全确定的。”^[10]“戴德金分割法”的虚伪之处在于只能解决已知的无理数问题。事实上, 且不说现行实数系定义的有问题, 即使回避这些也还有问题, 我们对“代数数之外”有多少认识——超越数又分为多少类? 它们的性质如何? Dedekind 分割法对性质尚未弄清的数是无能为力的。

Méray 和 Heine 与 Cantor 的思想具有一致性。Cantor 的思想是这样的: “把实数 a 定义为有理数序列 $\{a_n\}$, 这里若 $\{a_n\}$ 必须是满足柯西收敛准则的基本序列, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_{n+v} - a_n$

对任意正整数 v 一致地趋于 0。Cantor 把每个有理数基本序列与一个实数等同起来。而两个基本序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 则被看成是等价的, 即它们定义同一个实数。若 $\{b_n\}$ 是任意实数序列, 又若对任意正整数 μ 一致地有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+\mu} - b_n) = 0$ 成立, 则必存在唯一的一个实数 b , 它被一个由有理数 a_n 构成的基本序列 $\{a_n\}$ 所确定, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ”^[11] 并认为这样就证明了实数的完备性。

事实上, Cantor 的思想与 Bolzano-Weierstrass 区间套定理所讲的一样, 即“如果实数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件 (1) $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}, \forall n > 1$; (2) $\lim (a_n - b_n) = 0$, 那么, (i) 序列 $\{a_n\}$ 与序列 $\{b_n\}$ 收敛于相同的极限值: $\lim a_n = \lim b_n = c$, (ii) c 是满足下列条件的唯一实数: $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ 。”^[12] 他们用的都是有理逼近, 而按照 Baire 的第二类集合和 Lebesgue 的测度理论, 存在无数超越数区间, 阻隔 a_n 和 a_{n+p} 以及 b_n 和 $b_{n+\mu}$ 相互靠近, 也阻隔自有理区间开始的区间套收敛向一点。用时髦的词说就是, $\forall \epsilon > 0$, 使得与 $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ 要求一致的 $N(\epsilon)$ 不存在, 因为 m 和 n 都是自然数, 按照康托定理, 都无法趋近以 $2^{\aleph_0}$ 或之上为基的 ∞ , 从而 (χ, ρ) 不完备。当然, 这都是就谬论说谬论。

这样, 若承认极限论, 就得否认 Baire^[13] 和 Lebesgue 的理论; 若承认 Baire 和 Lebesgue 的理论, 极限论的实数定义就靠不住。还有, Cantor 定义的实数是数而不是量, 因此, 没有测度, 支持不了 Lebesgue 的测度理论。

2.2 总体与其局部并非可以一一对应

Dedekind 和 Cantor 试图为“无穷集合理论”寻找一个基础。“他们在 Bolzano 的悖论中

找到了这个, 他们没有把它仅仅当作无穷集合的一个奇怪特性, 而是把它作为一个无穷集合的定义。戴德金说‘如果系统 S 与其适当的部分相似, 则它是无限系统; 反之, 则 S 为有限系统。’在这一定义之下, 无穷集合作为逻辑上自相容的实体而存在, 实数的定义就完成了。”^[14] 这就是康托主义者绞尽脑汁要人们接受, 同时也是支撑现行微积分原理的依据——“总体与其局部可以一一对应”。这样, 就有——如果系统 S 与其适当的部分相似, 则它是无限系统; 如果 S 是无限系统, 则 S 就可以与其适当的部分相似——这就是大数学家的所为, 这就是神圣不可侵犯的大数学家。不仅如此, 人们还必须遵守“谆谆教导”, 布尔巴基学派核心成员 F. 豪斯道夫说: “这一违反公理‘全体大于部分’的事实, 即是‘无限的矛盾之一’, 对此, 我们必须习惯……”^[15]

所谓的局部可以与整体一一对应, Cantor 先生及其追随者是这样解释的: “对于有限集合, 这当然是不可以的, 可是, 无限集合不同了。比如有限的自然数无法与这些自然数中的奇数一一对应, 而无限的自然数就可以与这些无限的自然数中的奇数一一对应, 可见, 有限集合与无限集合不同。”然而, 对于无限集合中的局部可以与整个集合自身一一对应这一观点, 并没有给出有力的证明。

相反, 设 A, B, C, D, E 为无限集合, $A = B + C + D$, 再设 $C = E$, 则 E 为 A 的真子集。 A 中的真子集 C 足以与 E 一一对应 (有公理保证), 故而, E 中再无元素可与 B 和 D 对应。这个简单的证明对无限集合和有限集合都适用。光看到 A 与 E 中的元素是无限的, 就不区分增长速度地举出某一个对应方式, 很不妥。这种观点的幼稚在于, 因为 E 中具有无限多元素, 所以, E 就可以与 $(B + C + D)$ 中的元素一一对应下去, 可是,

他们忘记了C与E是同步的无穷多,从而,B与D在E中找不到对应项。相反,谁举出某一个对应方式,谁就得给出可以这样列举的证明。有人说:“通过具体列举就可以证明一一对应。”事实上,这是无限集合,谁列举得完?他们还可以说:“给出列举方式就可以了。”同样,忽视两个集合的增长速度(即关联关系)的列举方式是不可能的。当我们说E是A的真子集时,这就已经是关联关系了。

就自然数可以与其子集奇数一一对应的说法而言,一个是:1、2、3... n ...;另一个是:1、3... (2 n -1)。即使到了 ∞ , n 也是同步的,因此,自然数集合是奇数集合的2倍。当然,有人又会说:“这是有限集合的逻辑。”可是,主张无限集合具有上述特征的人给出过令人信服的证明吗?他们不也是承认全体自然数不能与全体实数建立一一对应关系吗?

诚然,任意一个实数区间里的实数是可以与自然数建立一一对应关系的,这也就是通常所说的数数(这与1890年Cantor证明他的定理也是截然相反的)^[16],因为这两个无限集合没有关联关系。有人说:“不!自然数是实数的真子集。”我们说:“自然数集是实数集的真子集,自然数集可不是实数集子区间的真子集。”

2.3 Cantor定理的证明的前提不成立

Cantor定理的基本论点散见于似是而非的题目为《论全体代数数的性质》的文章中,这篇文章发表于1874年克雷尔主编的《纯粹数学与应用数学》杂志上。Cantor自己满意的证明发表于1890年,这个证明的要点是:

“假定(0,1]是可数集,则必然存在(0,1]中所有实数的一个序列 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$,然后将每个这样的实数写成十进制小数形式,并约定将有理数写成无穷小数,如 $1/2=0.4999\dots$,于是有:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow a_1 = 0.P_{11}P_{12}P_{13}\dots \\ 2 &\leftrightarrow a_2 = 0.P_{21}P_{22}P_{23}\dots \\ 3 &\leftrightarrow a_3 = 0.P_{31}P_{32}P_{33}\dots \\ &\vdots \\ K &\leftrightarrow a_k = 0.P_{k1}P_{k2}P_{k3}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

再构造 $b=0.b_1b_2b_3\dots b_k\dots$,并规定 $P_{kk}=1$,则 $b_k \neq 9$,若 $P_{kk} \neq 1$,则 $b_k=1$,因此, b 是(0,1]中的一个实数,但却不同于如上序列中的任何一个实数,这就与假设矛盾,因此,(0,1]是不可数的,同理,任何实数区间均不可数。”^[17]

如上证明有前提性错误——实数不可以写作无限不循环小数,因为这里是纯数学而不是应用数学。有理数当然不是无限不循环小数,无理数也只是他自己,绝不是无限不循环小数。无限小数是动态的、不确定的数,而无理数是静态的、确定的数。如果用序列讲,无理数是无限不循环小数序列的极限,而不是它自身,也不是这个动态过程。Cantor的错误在于把无理数等同于该无理数对应的无限不循环小数序列的动态过程。也就是说,Cantor把无限不循环小数序列的极限与无限不循环小数序列的动态延续混为一谈。

康托定理还有一种直观的证明方式,当然也是反证法。设(0,1]的所有点(数)可以排成

$$“ a_1, a_2, a_3, \dots ” \quad (1)$$

我们把标号 a_1 的点用一个长为 $\frac{1}{10}$ 的区间盖住,标号 a_2 的点用一个长为 $\frac{1}{10^2}$ 的区间盖住,如此下去,如果0和1之间的所有点都包含在序列(1)中,则这个单位区间将被长为 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ...的子区间(可能有相互重叠)序列完全盖住(其中有些区间超出了这个单位区间,这一事实并不影响我们的证明)。这些区间长度的总

和由等比级数

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{1}{9}$$

给出, 因此从序列 (1) 包含了从 0 到 1 的所有实数这个假定出发, 我们推出用总长为 $\frac{1}{9}$ 的区间盖住长度为 1 的中个区间, 这在直观上是荒谬的。^[18]其它单位区间亦然。因此, 康托及其赞成者认为康托定理成立。这个反证法同样有一个致命前提性错误——认为测度的数学承担者理所当然地是点或者数本身。其实不然, 在现行数学的数-形模型条件下, 测度的数学承担者只能是连续区间的点空儿, 当然, 这个问题会在下面谈测度问题时给出说明。如果认为点与点之间的空隙是测度的数学承担者, 则有 $\delta_i = \frac{1-0}{n}$, $m[(0, 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \frac{1-0}{n}) = 1$, 这才顺理成章。因此, 我们说把不是测度承担者的点或者数强行加上长度, 然后得出一个错误的结论, 这能说明什么呢?

相反, 实变函数是为了支持和完善古典微积分原理而建立的, 实变函数通过一次错误证明了古典微积分原理中的错误不错的同时, 又把不错的变成错的了。在古典微积分原理那里, 积分被定义为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ 或者 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, 而在实变函数这里 n 对应的是可数无穷大, x 对应的是不可数无穷大。按照上述康托定理, n 对应的可数无穷大 ∞ 是无法穷尽 $[a, b]$ 的, 因此, 无法实现 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ 。

人们还须注意一个事实, 康托定理, 除所谓

的反证法之外, “即使在原则上也不可能给出直接的构造性证明。”^[19]像 H. Poincaré (1854—1912)、L. E. Brouwer (1881—1966)、H. Weyl (1885—1955) 这类非假大空数学家是不承认从康托到希尔伯特的不严肃的东西的。

2.4 现行实数系没有测度

“ μ 可以唯一地扩张成为 $B(R^n)$ 上的 σ 的有限测度 (称之为 Lebesgue 测度)。令 $\overline{B(R^n)}$ 为 $B(R^n)$ 的完备化, 称 $\overline{B(R^n)}$ 中元为 Lebesgue 可测集, 而 $B(R^n)$ 中元为 Borel 可测集。”^[20]对此, 人们要问测度的数学承担者是谁? Lebesgue 一行人回答是超越数。在 Cantor、Baire 乃至 Lebesgue 等人看来, 实数已经填满了数轴, 无理数 (或者超越数) 就是测度的数学承担者, 这就是测度理论的核心思想^[21]。Lebesgue 的原话是这样说的: “我希望首先对集合赋予数的属性, 这种数类似于它们的长度。”^[22]这种理论是使用排除法完成的, 其证明的逻辑脉络为: 区间及其对应的线段是有测度的, 而代数数及其对应点的测度为 0。可是, 区间及其对应线段是由代数数及其对应点和超越数及其对应点构成的, 所以, 超越数及其对应点是测度的数学承担者。事实上, 区间及其对应的线段不是由二者, 而是由三者——代数数与超越数以及数与数的间隙共同构成, 因此, 只排除代数数是测度的数学承担者, 但却不知道与实数一样多的间隙存在, 就武断地说超越数及其对应点是测度的数学承担者, 这种逻辑是不成立的。事实上, 现行实数从来就没填满过数轴, 因为现行数和点都是无度量的, 而数轴是有度量的, 无度量的数或点不管多到何种程度, 数轴都是有空隙的, 从这种空想出发的任何证明都是立不住的。数是不能有测度的, 只有量才可以有测度, 量是数的差。

背离 Leibniz 微积分思想的人总是不厌其烦地高叫“直觉不可靠”。直觉确实未必可靠,可是直觉可以让人轻而易举地发现荒唐,比如“局部可以与整体一一对应”。即使我们权且相信几何直观未必可靠,那么,解析几何也不可靠吗?解析几何告诉人们,超越数对应的点与代数数对应的点在解析几何意义上没有任何不同,代数数承担不了测度,超越数怎么就能承担测度呢?

再从另一个角度看测度论:一个超越(数)点的测度是0,可数无穷多个超越(数)点的测度也是0,而不可数无穷多个超越(数)点的测度就是非0的一个具体数值了。

除非是全体实数,否则,就不存在不可数无穷多。自然数集是实数集的真子集,因此,自然数不能与全体实数一一对应;而自然数不是实数集子区间的真子集,因而,它们之间没有关联关系,自然数可以与任意实数区间建立一一对应关系。正是这个道理,任意实数区间里的数都是可数的。

2.5 实变函数论对刘维尔不等式的解释有错误

以往对 Liouville 不等式 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{A^* q^n}$ 的解释——“无理数 x_0 同任何有理数 $\frac{p}{q}$ 之间必定至少存在一个大小为 $\frac{1}{A^* q^n}$ 的空隙。”^[23]并以此得到“代数数犹如镶嵌在长空夜幕下的点点繁星,而浓黑的万里长空则是超越数的苍穹。”^[24]从而,超越数“理论”成为支撑 Lebesgue 测度论的基础。

如上对刘维尔不等式的解释是错误的。恰恰相反,随着 $q \rightarrow \infty$, $\frac{1}{A^* q^n} \rightarrow 0$ 。也就是说,随着 q 的无限增大,有理数 p/q 可以无限地靠近

无理数(抑或超越数) x_0 。不管是有理数还是无理数,都可以无限逼近,因为 $\frac{1}{A^* q^n} \rightarrow 0$ 。

我们可否用有理数 $\left(\frac{q+1}{q} \right)^q$ 逼近 e 呢?如果这个逼近可以被一个恒定的,哪怕是微小的量阻隔,那么,人们就可以说无理数不能用有理数‘很好地’逼近。事实上恰恰相反, $\left(\frac{q+1}{q} \right)^q$ 与 $\left(1 + \frac{1}{q} \right)^q$ 有什么不同?在 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 中,有 x 不能是自然数的规定吗?在 $\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right| \leq \epsilon$ 中, ϵ 不是任意小的正数吗?

事实上,对 Liouville 不等式,即使是 J. Liouville (1809–1882) 本人也没有给出过合理的解释。“Liouville 在 1844 年指出,代数数不能用有理数‘很好地’逼近...”^[25]

C. Hermite 通过 $F(x, y) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{-k-1} \frac{d^k}{dy^k} \left(\frac{y^m (y-1)^n}{m! n!} \right), \text{ 并令}$$

$$P(x) = (m+n)! x^{m+n+1} F(x, 0) \text{ 和 } Q(x) = (m+n)! x^{m+n+1} F(x, 1), \text{ 得到}$$

$$R(x) = P(x)e^x - Q(x), \quad \text{其中}$$

$$R(x) = (m+n)! x^{m+n+1} e^x \int_0^1 \frac{y^m (y-1)^n}{m! n!} e^{-xy} dy, \text{ 最后得到}$$

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2q^{2+\epsilon}}, \text{ 或 } \left| \frac{p}{q} - e \right| \geq \frac{1}{2q^{2+\epsilon}}, \text{ 其中 } q$$

大于等于由 ϵ 决定的常数 C 。^[26]

$$\text{不管 是 } \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{A^* q^n} \text{ 抑 或}$$

$$\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{2q^{2+\epsilon}}, \text{ 只要对比 Dirichlet 逼近不等式}$$

$\left| \frac{p}{q} - \theta \right| \leq \frac{1}{Qq}$, (其中, θ 为任意实数, 任意给定的实数 $Q > 1$, p 、 q 为整数)^[27], 就会明白, 现在数学界对刘维尔不等式的解释是错误的。这里的奥妙在于 q 是为逼近某一实数而设定的, 即 $q \rightarrow \infty$ 。

3 结 语

分析数学, 尤其是近代分析, 从来就不像对数学史知之甚少的数学工作者所理解的那个样子, 也从来不像当代数学教科书所写的那个样子。以 S.D.Poisson(1781–1840) 为代表的数学家从来就不同意以柯西为代表的微积分原理, 以 H.Poincaré、F.Klein (1849–1925) 等为代表的数学家从来就不同意实变函数理论。人们似乎忘记, “庞加莱、克莱因和希尔伯特, 是在 19 世纪和 20 世纪数学交界线上耸立着的三个巨大身影。”^[28] “三个巨大身影” 中的两个都反对的东西, 竟然会向希尔伯特一边倒, 个中数学之外的原因所起作用该引起我们深思。

最基本内容已经成为分析数学各个分支的普遍基础^[29]的实变函数理论仍然值得质疑。总而言之, 这里不求如上论证个个四平八稳, 只要其中有一个立得住, 就足以说明作为现行微积分原理的完善的实变函数理论是立不住的。■

●参考文献

- [1] George Berkeley, The Works of George Berkeley(4), Neison & Sone, London, 1951:53.
- [2] 丁小平. 浅谈现行微积分原理的错误. 前沿科学, 2015(4).
- [3] 鲁宾逊. 非标准分析. 科学出版社, 1980:2.
- [4] J.迪尔多内. 现代分析基础(第一卷). 科学出版社, 1982:iii.
- [5] 张景中. 数学与哲学. 大连理工大学出版社, 2008:26
- [6] 武际可. 力学史杂谈. 高等教育出版社, 2009:35–37.
- [7] 李心灿. 微积分的创立者及其先驱(第三版). 高等教育出版社, 2007:240.
- [8] B.波耶. 唐生译. 微积分概念发展史. 复旦大学出版社, 2007:283.
- [9] B.波耶. 唐生译. 微积分概念发展史. 复旦大学出版社, 2007:284.
- [10] C.爱德华. 张鸿林译. 微积分发展史. 北京出版社, 1987:454.
- [11] 李文林. 数学史概论(第二版). 高等教育出版社, 2002:254.
- [12] 张筑生. 数学分析新讲(第一册). 北京大学出版社, 1990:76.
- [13] W. Dunham. 李伯民等译. 微积分的历程. 人民邮电出版社, 2010:194.
- [14] B.波耶. 唐生译. 微积分概念发展史. 复旦大学出版社, 2007:288.
- [15] F.豪斯道夫. 张一良等译. 集论. 科学出版社, 1960:17
- [16] R.柯朗, H.罗宾. 什么是数学(第二版). 复旦大学出版社, 2008:95
- [17] 李文林. 数学史概论(第二版). 高等教育出版社, 2002:257.
- [18] R.克朗, H.罗宾. 什么是数学(第三版). 复旦大学出版社, 2012:96–97.
- [19] R.克朗, H.罗宾. 什么是数学(第三版). 复旦大学出版社, 2012:101.
- [20] 严加安. 测度论讲义(第二版). 科学出版社, 2004:23.
- [21] 周民强. 实变函数论(第二版). 北京大学出版社, 2008:51–59.
- [22] H.Lebesgue, Lecons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier–Villars, 1904:36.
- [23] W. Dunham. 李伯民等译. 微积分的历程. 人民邮电出版社, 2010:140.
- [24] Eric Temple Bell, Men of Mathematics, Simon & Schuster, 1937:569.
- [25] 于秀源. 超越数论基础. 哈尔滨工业大学出版社, 2011:22.
- [26] 于秀源. 超越数论基础. 哈尔滨工业大学出版社, 2011:35–39.
- [27] 朱尧辰. 无理数引论. 中国科学技术大学出版社, 2012:9–16.
- [28] 李文林. 数学史概论(第二版). 高等教育出版社, 2002:270.
- [29] 中国大百科全书(数学卷). 中国大百科全书出版社, 1988:279.

推荐语:

以柯西为代表的现行微积分原理诞生已经195年了,对微积分原理进行进一步的探讨从来就没有停止过。现在,国际上有Peter·Lax院士等数学家在研究这些问题,国内有张景中院士等数学家也在研究这些问题。

本文作者从一个全新的视角思考微积分原理的基础问题,做到了持之有故,言之成理,这对推动微积分

原理的深入研究是有益处的。

推荐人:罗华章

罗华章,数学家。1989年获国际奥林匹克数学竞赛冠军,1994年毕业于北京大学数学科学学院,同年赴麻省理工学院留学。在麻省理工学院数学系获数学博士、博士后。目前在英国从事金融数学和基础数学研究。

A Brief Discussion on Functions of Real Variables as the Perfection of Principles of Calculus

Ding Xiaoping

(Jieyin Temple, Zhejiang 365500)

Abstract: Aiming at problems related to functions of real variables, this paper enumerates several misunderstandings, including circular reasoning, in functions of real variables in a popular and concise way; thereby, the argument is proved to be insufficient that theories of functions of real variables are the perfection of current principles of calculus.

Key words: Real Numbers; Number-Figure Model; Cantor's Theorem; Measure