

实变函数理论中的一些错误

◎丁小平 (接引寺, 浙江 宁波 365500)

【摘要】作为现行微积分原理的完善,或者作为分析严格化的实变函数理论立得住吗?本文以通俗而简明的方式列举了实变函数理论的几处核心错误或误解,从而,让人们清楚实变函数理论作为现行微积分原理的完善的论据是靠不住的。

【关键词】实数;数-形模型;康托定理;测度

一、引言

《浅谈现行微积分原理的错误》^[1]一文发表后,某名校组织包括数学院士在内的数学科学学院的教授们写文章批驳,滑稽的是批不了,理由是“一位工科男捡了个天大的洋便宜”,还有人说:“我早就知道微积分原理有错误,可是,这些问题在实变函数理论和现代分析那里早已解决了。”事情真的是这样吗?

事实上,“最基本内容已经成为分析数学各个分支的普遍基础”^[2]的实变函数理论也立不住。下面,就“冒着被责骂的危险”,^[3]与“也要吃饭、穿衣”^[4]的数学家们探讨一下实变函数理论中的问题。

二、实变函数理论中的种种问题

(一)现行实数理论还不能自圆其说

现代主流数学家声称实数理论是严密而完整的,因为它以科学的极限理论为依托;极限论的科学性是不容置疑的,因为它以严密而完整的实数理论为前提。事实上是这样吗?在解析几何视角下,到定点的距离为定长的动点的轨迹为圆。而在解析几何的坐标中,任意两点都对应两个数或者两个数组,也就是说,任意两个点或两个数之间都可以插入无限多个点或者数(数组),因此,只有这样几何图形或区间才有长度(测度)可言。基于此,不管边数怎样无限增多,正多边形的任意一个边的两个端点都不会重合,只有这样,正多边形才保有周长。然而,这样一来,“到定点的距离为定长的动点的轨迹”反倒不存在了。极限论的来源就是“正多边形边数无限增多的极限是圆”,而在现行实数理论体系之下的解析几何中,极限论中的极限都不存在了,尤其是瞬时变化率对应的切线和积分对应的曲边梯形不存在了,而展现在解析几何中的只能是切割长度无限减小的割线和折数无限增多的折线梯形。解析几何是数与形的统一,也就是说,现行实数系下的解析几何从数和形两个方面否定了极限论。

Bolzano 和 Weierstrass,乃至 Méray,Heine 与 Cantor 的思想具有一致性,他们都用极限论定义实数系。只实数依靠极限论这一点,就足以说明实数理论的科学性尚待解决。

Dedekind 没有用极限论构造实数,但他的方法没有能力构造出实数系。他说:“每当我们考虑一个不是由有理数

产生的分割(A_1, A_2)时,就得到一个新数即无理数 a ,我们认为这个数是由分割(A_1, A_2)完全确定的。”^[5]“戴德金分割法”的虚伪之处在于只能分割出其性质已知的实数。事实上,我们对“代数数之外”知之甚少——超越数又分为多少类?它们的性质如何?Dedekind 分割法对性质尚未弄清的数是无能为力的。

(二)总体与其局部可以一一对应纯系呓语

设 A, B, C, D, E 为无限集合, $A = B + C + D$,再设 $C = E$,则 E 为 A 的真子集。 A 中的真子集 C 足以与 $E \rightarrow$ 对应(有公理保证),故而, E 中再无元素可与 B 和 D 对应。这个简单的证明对无限集合和有限集合都适用。光看到 A 与 E 中的元素是无限的,就不区分增长速度地举出某一个对应方式,很不妥。这种观点的幼稚在于,因为 E 中具有无限多元素,所以, E 就可以与 $(B + C + D)$ 中的元素一一对应下去,可是,他们忘记了 C 与 E 是同步的无穷多,从而, B 和 D 在 E 中找不到对应项。相反,谁举出某一个对应方式,谁就得给出可以这样列举的证明。有人说:“通过具体列举就可以证明一一对应。”我们说,这是无限集合,谁列举得完?他们还可以说:“给出列举方式就可以了。”我们说,忽视两个集合的增长速度(即关联关系)的列举方式是胡扯。当我们说 E 是 A 的真子集时,这就已经是关联关系了。

就自然数可以与其子集奇数一一对应的说法而言,一个是 $1, 2, 3, \dots, n$;另一个是 $1, 3, \dots, 2n-1$ 。即使到了 ∞, n 也是同步的,因此,自然数集合是奇数集合的2倍。当然,有人又会说:“这是有限集合的逻辑。”可是,主张无限集合具有上述特征的人给出过令人信服的证明吗?他们不也承认全体自然数不能与全体实数建立一一对应关系吗?难道这不是两个无限集吗?

诚然,任意一个实数区间里的实数是可以与自然数建立一一对应关系的,这也就是通常所说的数数(这与1890年Cantor证明他的定理也是截然相反的)^[6],因为这两个无限集合没有关联关系。有人说:“不!自然数是实数的真子集。”我们说:“自然数集是实数集的真子集,自然数集可不是实数集子区间的真子集。”

(三)Cantor定理的证明的前提不成立

Cantor定理的基本论点散见于似是而非的题为《论全体代数数的性质》的文章中,这篇文章发表于1874年克雷尔主编的《纯粹数学与应用数学》杂志上。Cantor自己满意的证明发表于1890年,这个证明的要点是:

“假定 $(0, 1]$ 是可数集,则必然存在 $(0, 1]$ 中所有实数的一个序列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$,然后将每个这样的实数写成十进制小数形式,并约定将有理数写成无穷小数,如, $\frac{1}{2} =$

0.4999..., 于是有

$$1 \leftrightarrow a_1 = 0. P_{11} P_{12} P_{13} \dots$$

$$2 \leftrightarrow a_2 = 0. P_{21} P_{22} P_{23} \dots$$

$$3 \leftrightarrow a_3 = 0. P_{31} P_{32} P_{33} \dots$$

⋮

$$K \leftrightarrow a_k = 0. P_{k1} P_{k2} P_{k3} \dots$$

⋮

再构造 $b = 0. b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$, 并规定 $P_{kk} = 1$, 则 $b_k \neq 9$, 若 $P_{kk} \neq 1$, 则 $b_k = 1$, 因此, b 是 $(0, 1]$ 中的一个实数, 但却不同于如上序列中的任何一个实数, 这就与假设矛盾, 因此, $(0, 1]$ 是不可数的, 同理, 任何实数区间均不可数.”^[7]

如上证明有前提性错误——实数不可以写作无限不循环小数, 因为这里是纯数学而不是应用数学. 有理数当然不是无限不循环小数, 无理数也只是他自己, 绝不是无限不循环小数. 无限小数是动态的、不确定的数, 而无理数是静态的、确定的数. 如果用序列讲, 无理数是无限不循环小数序列的极限, 而不是它自身, 也不是这个动态过程. Cantor 的错误在于把无理数等同于该无理数对应的无限不循环小数序列的动态过程. 也就是说, Cantor 把无限不循环小数序列的极限与无限不循环小数序列的动态延续混为一谈.

康托定理还有一种直观的证明方式, 当然也是反证法. 设 $(0, 1]$ 的所有点(数)可以排成

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (1)$$

我们把标号 a_1 的点用一个长为 $\frac{1}{10}$ 的区间盖住, 标号 a_2

的点用一个长为 $\frac{1}{10^2}$ 的区间盖住, 如此下去, 如果 0 和 1 之间的所有点都包含在序列 (1) 中, 则这个单位区间将被长为 $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots$ 的子区间(可能有相互重叠)序列完全盖住.(其中有些区间超出了这个单位区间, 这一事实并不影响我们的证明)这些区间长度的总和由等比级数 $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} +$

$$\dots = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{1}{9} \text{ 给出. 因此, 从序列 (1) 包含了从 0 到}$$

1 的所有实数这个假定出发, 我们推出用总长为 $\frac{1}{9}$ 的区间盖住长度为 1 的整个区间. 这在直观上是荒谬的.^[8] 其他单位区间亦然. 因此, 康托及其赞成者认为康托定理成立. 这个反证法同样有一个致命前提性错误——认为测度的数学承担者理所当然地是点或者数本身. 其实不然, 在现行数学的数-形模型条件下, 测度的数学承担者只能是连续区间的点空儿, 当然, 这个问题会在下面谈测度问题时给出说明. 如果认为点与点之间的空隙是测度的数学承担者, 则有 $\delta_i = \frac{1-0}{n}, m[(0, 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1-0}{n} \right) = 1$, 这才顺理成章. 因此, 我们说把不是测度承担者的点或者数强行加上长度, 然后得出一个错误的结论, 这能说明什么呢?

相反, 实变函数是为了支持和完善古典微积分原理而建立的, 实变函数通过一次错误证明了古典微积分原理中

的错误不错的同时, 又把不错的变成错的了. 在古典微积分

原理那里, 积分被定义为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ 或者

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \text{ 而在实变函数这里 } n \text{ 对应的是}$$

可数无穷大, x 对应的是不可数无穷大. 按照上述康托定理, n 对应的可数无穷大 ∞ 是无法穷尽 $[a, b]$ 的, 因此, 无法实

$$\text{现 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

人们还须注意一个事实, 康托定理, 除所谓的反证法之外, “即使在原则上也不可能给出直接的构造性证明.”^[9] 像 H. Poincaré (1854—1912)、L. E. Brouwer (1881—1966)、H. Weyl (1885—1955) 这类非假大空数学家是不承认从康托到希尔伯特的不严肃的东西的.

(四) 现行实数系没有测度

“ μ 可以唯一地扩张成为 $B(R^n)$ 上的 σ 的有限测度(称之为 Lebesgue 测度). 令 $\overline{B(R^n)}$ 为 $B(R^n)$ 的完备化, 称 $\overline{B(R^n)}$ 中元为 Lebesgue 可测集, 而 $B(R^n)$ 中元为 Borel 可测集.”^[10] 与此相类似, 还有 $C[0, T]$ 上的 Wiener 测度^[11]. 对此, 人们要问测度的数学承担者是谁? Lebesgue 一行人回答是超越数. 在 Cantor、Baire 乃至 Lebesgue 等人看来, 实数已经填满了数轴, 无理数(或者超越数)就是测度的数学承担者, 这就是测度理论的核心思想^[12]. Lebesgue 的原话是这样说的: “我希望首先对集合赋予数的属性, 这种数类似于它们的长度.”^[13] 这种理论是使用排除法完成的, 其证明的逻辑脉络为: 区间及其对应的线段是有测度的, 而代数数及其对应点的测度为 0. 可是, 区间及其对应线段是由代数数及其对应点和超越数及其对应点构成的, 所以, 超越数及其对应点是测度的数学承担者. 事实上, 区间及其对应的线段不是由二者, 而是由三者——代数数与超越数以及数与数的间隙共同构成, 因此, 只排除代数数是测度的数学承担者, 但却不知道与实数一样多的间隙存在, 就武断地说超越数及其对应点是测度的数学承担者, 这种逻辑是可笑的. 事实上, 现行实数从来就没填满过数轴, 因为现行数和点都是无度量的, 而数轴是有度量的, 无度量的数或点不管多到什么程度, 数轴都是有空隙的, 从这种空想出发的任何证明都是立不住的. 数是不能有测度的, 只有量才可以有测度, 量是数的差. 解析几何告诉人们, 超越数对应的点与代数数对应的点在解析几何意义上没有任何不同, 代数数承担不了测度, 超越数怎么就能承担测度呢?

再从另一个角度看测度论: 一个超越(数)点的测度是 0, 可数无穷多个超越(数)点的测度也是 0, 而不可数无穷多个超越(数)点的测度就是非 0 的一个具体数值了. 谁的大脑可以接受这样的逻辑?

除非是全体实数, 否则, 就不存在不可数、无穷多. 自然数集是实数集的真子集, 因此, 自然数不能与全体实数一一对应; 而自然数不是实数集子区间的真子集, 因而, 它们之间没有关联关系, 自然数可以与任意实数区间建立一一对应关系. 正是这个道理, 任意实数区间里的数都是可数的.

(五) 实变函数论对刘维尔不等式的解释有错误

以往对 Liouville 不等式 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{A \cdot q^n}$ 的解释——

“无理数 x_0 同任何有理数 $\frac{p}{q}$ 之间必定至少存在一个大小为

$\frac{1}{A \cdot q^n}$ 的空隙”。^[14] 并以此得到“代数数犹如镶嵌在长空夜幕

下的点点繁星,而浓黑的万里长空则是超越数的苍穹”。^[15] 从而,超越数“理论”成为支撑 Lebesgue 测度论的基础。

如上对刘维尔不等式的解释是错误的。恰恰相反,随着

$q \rightarrow \infty, \frac{1}{A \cdot q^n} \rightarrow 0$ 。也就是说,随着 q 的无限增大,有理数 $\frac{p}{q}$ 可

以无限地靠近无理数(抑或超越数) x_0 。不管是有理数还是

无理数,都可以无限逼近,因为 $\frac{1}{A \cdot q^n} \rightarrow 0$ 。

我们可否用有理数 $(\frac{q+1}{q})^q$ 逼近 e 呢? 如果这个逼近

可以被一个恒定的,哪怕是微小的量阻隔,那么,人们就可以说无理数不能用有理数‘很好地’逼近。事实上恰恰相反,

$(\frac{q+1}{q})^q$ 与 $(1 + \frac{1}{q})^q$ 有什么不同? 在 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 中,

有 x 不能是自然数的规定吗? 在 $|(1 + \frac{1}{x})^x - e| \leq \varepsilon$ 中, ε

不是任意小的正数吗?

事实上,对 Liouville 不等式,即使是 J. Liouville (1809 - 1882) 本人也没有给出过合理的解释。“Liouville 在 1844 年指出,代数数不能用有理数‘很好地’逼近……”^[16]

C. Hermite 通过

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k-1} \frac{d^k}{dy^k} \left(\frac{y^m (y-1)^n}{m! n!} \right)$$
, 并令 $P(x) =$

$(m+n)! x^{m+n+1} F(x, 0)$ 和 $Q(x) = (m+n)! x^{m+n+1} F(x, 1)$,

得到 $R(x) = P(x)e^x - Q(x)$, 其中 $R(x) = (m+n)!$

$x^{m+n+1} e^x \int_0^1 \frac{y^m (y-1)^n}{m! n!} e^{-xy} dy$, 最后得到 $|e - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{2q^{2+\varepsilon}}$, 或

$|\frac{p}{q} - e| \geq \frac{1}{2q^{2+\varepsilon}}$, 其中 q 大于等于由 ε 决定的常数 C 。^[17]

不管是 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{A \cdot q^n}$ 抑或 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{2q^{2+\varepsilon}}$, 只要

对比 Dirichlet 逼近不等式 $|\frac{p}{q} - \theta| \leq \frac{1}{Qq}$, (其中, θ 为任意

实数,任意给定的实数 $Q > 1, p, q$ 为整数)^[18], 就会明白,现在

在数学界对刘维尔不等式的解释是错误的。因为 Dirichlet

的 θ 可以是 Liouville 的 x_0 。这里的奥妙在于 q 是为逼近某一

实数而设定的,即 $q \rightarrow \infty$ 。

三、结 语

分析数学,尤其是近代分析,从来就不像对数学史知之

甚少的数学工作者所理解的那个样子,也从来不像当代数

学教科书所写的那个样子。以 S. D. Poisson (1781—1840) 为

代表的数学家从来就不同意以柯西为代表的微积分原理,

以 H. Poincaré, F. Klein (1849—1925) 等为代表的数学家从

来就不同意实变函数理论。人们似乎忘记,“庞加莱、克莱因和希尔伯特,是在 19 世纪和 20 世纪数学交界线上耸立着的三个巨大身影”。^[19] “三个巨大身影”中的两个都反对的东西,竟然会向希尔伯特一边倒,个中就不是数学之外的原因在起作用吗?

总而言之,这里不求如上论证各个四平八稳,只要其中有一个立得住,就足以说明作为现行微积分原理的完善的实变函数理论是立不住的。

【参考文献】

[1] 丁小平. 浅谈现行微积分原理的错误[J]. 前沿科学, 2015(4): 82-87.

[2] 中国大百科全书(数学卷)[M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1988: 279.

[3] J·迪尔多内. 现代分析基础: 第一卷[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 11.

[4] 张景中. 数学与哲学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 26.

[5] C·爱德华. 微积分发展史[M]. 北京: 北京出版社, 1987: 454.

[6] R·柯朗, H·罗宾. 什么是数学(第二版)[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2008: 95.

[7] 李文林. 数学史概论(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 257.

[8] R·克朗, H·罗宾. 什么是数学(第三版)[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2012: 96-97.

[9] R·克朗, H·罗宾. 什么是数学(第三版)[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2012: 101.

[10] 严加安. 测度论讲义(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 23.

[11] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义(下册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990: 250.

[12] 周民强. 实变函数论(第二版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008: 51-59.

[13] H Lebesgue. Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives[J]. Gauthier - Villars, 1904: 36.

[14] W Dunham. 微积分的历程[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010: 140.

[15] E T Bell. Men of Mathematics[M]. New York: Simon & Schuster, 1937: 569.

[16] 于秀源. 超越数论基础[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 22.

[17] 于秀源. 超越数论基础[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 35-39.

[18] 朱尧辰. 无理数引论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012: 9-16.

[19] 李文林. 数学史概论(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 270.