

微分之讲授

◆丁小平

(接引寺,浙江 365500)

摘要:正确讲授微分是数学界还未解决的问题,本文在简述《浅谈现行微积分原理的错误》和《略论作为微积分原理的完善的实变函数》发表以来学界的反应之后,指出了极限论的数学基础的欠缺,然后,指出用矩阵定义微分的做法仍然是错误的,最后,给出正确讲授微分的方法。

关键词:微积分原理;导数;微分;数—形模型

中图分类号:O172

文献标识码:A

1 引言

2015年底《前沿科学》发表拙文《浅谈现行微积分原理的错误》,2016年3月北京大学数学文化研究会和中国人民大学青年数学研究会等联合发起了“重新审视微积分原理”系列学术报告会,并于4月底和5月初邀请林群院士、笔者和张景中院士在人大和北大等几所高校作系列学术报告。在学术讨论的同时,也有不同声音,其中有一所名校学经济学的领导单方撤销学术报告会,还组织了数学科学学院的名师批驳《浅谈现行微积分原理的错误》。折腾了半天,最后这些同行的结论是“这个工科男在数学上捡了个天大的洋便宜”。我不知道这是怎样一种心态?

有趣的是,2017年开学,在北京大学某微

积分课堂上,微分定义的讲法被统一到陈天权的用矩阵定义微分^[1]的讲法上,而不再采用其他讲法。我们应该怎样理解这种“莫名其妙”的行径呢?

还有,有的数学教师说:“即使现行微积分原理有错误,也不能说明现行微积分原理是错的,因为,到了实变函数理论那里所有问题都解决了。”事实是这样吗?2016年底,《前沿科学》又发表了笔者的《略论作为微积分原理的完善的实变函数》,笔者在这里指明了现行实数理论、测度理论、无穷集合理论等诸个领域中的根本性错误。

用矩阵,改变的只是表达方式,并没有改变自柯西以来的错误机理。而数学工作者,没有理由再讲授错误的理论。因为,讲错了,是能力问题;坚持错误,是道德问题。

收稿日期:2017-08-05

修订日期:2017-08-21

作者简介:丁小平(1962-),1986级清华大学工学硕士研究生,1988级北京大学理学硕士研究生,1988级中央民族大学哲学硕士研究生。1984年至今一直从事高等教育和科学研究工作。E-mail:mathchina@yeah.net

牛顿和莱布尼兹一生也没能建立起能自圆其说的微积分原理,柯西建立起来了,可是,一直都是错误的。发现这些问题难,敢于确信自己的发现真比登天还难。而解决问题就更难,可解决了之后,问题简单得让人不敢相信。诚如数学家张景中院士所说:“任何一个创造,在实现之前,都是困难的。因为人们是在无知中摸索。摸到之后,就成简单的了。”^[2]

给出并让数学教师接受新的微分讲授方法,还得从现行微积分原理说起。

2 极限论的数学前提不存在

谙熟数学史的学者都知道,现行微积分原理,就是在无奈时拼接了一点儿莱布尼兹的微分的极限化的牛顿的“微积分原理”。为什么一定要“拼接一点儿莱布尼兹的微分”呢?为了解释以微分方程求解方法为主的方方面面问题,否则,还成其为原理吗?要解决这些问题,就得有“微商”这一无法规避的东西,拼接莱布尼兹的微分的目的就在于此。

柯西为什么不以莱布尼兹的微积分原理为基础再通过拼接一点牛顿或者别人的什么东西形成微积分原理呢?因为柯西根本没有这样的数学功夫。莱布尼兹先定义微分的微积分原理是最简明易懂的,可是,他的微分说不清楚。莱布尼兹引进“ dx 表示两相邻 x 的差值。”^[3]那么,这“两相邻 x ”有多近呢?答曰:要多近就有多近。这个“要多近就有多近”就是问题。

其实,这个问题不能由莱布尼兹负责,问题出在数学的数一形模型上。这种问题无论是单独从数的模型上还是从几何模型上都不容易发现,一旦把两者联合起来——从解析几何角度出发,就一目了然了。下面,我们以现行解析几何中的

圆与正多边形的关系为例加以说明。在现行解析几何中,到定点的距离为定长的动点的轨迹为圆。而在现行解析几何的坐标中,任意两点都对应两个数或者两个数组,也就是说,任意两个点或两个数之间都可以插入无限多个点或者数(数组),只有这样,几何图形或区间才有长度(测度)可言。基于此,不管边数怎样无限增多,正多边形的任意一个边的两个端点都不会重合,只有这样,正多边形才保有周长。然而,这样一来,“到定点的距离为定长的动点的轨迹”反倒不存在了,而有的只是边长无限小下去的动态正多边形。极限论的来源就是“正多边形边数无限增多的极限是圆”,而在现行实数理论体系之下的解析几何中,极限论中的极限都不存在了,尤其是瞬时变化率对应的切线和积分对应的曲边梯形不存在了,而展现在解析几何中的只能是切割长度无限减小的割线和折数无限增多的折线梯形,切线和曲边梯形反倒不存在。解析几何是数与形的统一,也就是说,现行实数系下的解析几何从数和形两个方面否定了极限论。难道维尔斯特拉斯的以 $\epsilon - \delta$ 语言表达的极限原理就可以超越现行数学的数一形模型吗?一句话,极限论建立的前提是想当然的,而这种“想当然”是不存在的。据此,以这样的极限论为依据的微积分原理也就可想而知了。

当然,一方面,在新的数一形模型下,有比极限更生动而丰富的新数学范畴;另一方面,微积分原理与极限论没有必然联系,张景中院士^[4]和笔者各自建立的不用极限的微积分原理就是证明。

3 微分定义的错误

现行微积分原理定义微分的方式无非如下三大类:

1、强行定义 $dx = \Delta x$ ，于是， $dy = f'(x_0)\Delta x$ 就变成了 $dy = f'(x_0)dx$ ，因此，也就有了 $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ ，这样，就得到了微商形式。

2、做自欺欺人的演绎：对 $y = x$ ，
有 $dy = F'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ 。 $\because y = x$ ，
 $\therefore dy = dx$ ，

因此有 $dx = \Delta x$ ，从而得到 $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ 。

3、认为 x 自己就是 x 的函数，或者做恒等映射（单位映射），然后得到 $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ ，这与前述 $y = x$ 情形等价。

对于这三种做法人们不免要问：

1、凭什么强行定义 $dx = \Delta x$ ？依据何在？定义者是造物主？

2、对于特殊的 $y = x$ ，有 $dx = \Delta x$ ；对于一般的 $y = F(x)$ ，还有 $dx = \Delta x$ 吗？

3、在单位映射情形下， $dx = \Delta x$ ；在非单位映射情形下，还有 $dx = \Delta x$ 吗？

世界的过去没有“始”，世界的未来也无“终”。反映到数学上就是 $z = E(y)$ 、 $y = F(x)$ 、 $x = G(t)$ ，其中 z 又是上一级函数的自变量， t 又是下一个自变量的函数……。因此，除非 $x = t$ ，否则就得承认 $\Delta x = g(t_0)\Delta t + o_g(\Delta t) = dx + o_g(\Delta t)$ ，从而， $\Delta x \neq dx$ 。如果确定 $x \equiv t$ ，那么，隐函数的导数、参数方程的导数和不定积分的第二类换元法等这种处理方式等就无从谈起。如上做法还将导致微分方程求解原理的荒唐。

对于多元微积分则更是令人啼笑皆非。“设 m 元函数 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 在点 $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ 邻近有定义，如果存在 $A_i \in R, i = 1, \dots, m$ ，使得对于充分小的

$\Delta x = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^m)$ ，有这样的关系 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i + o(\|\Delta x\|)$ ，那么，我们就说函数 f 在点 x_0 可微，并把 $\sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i$ 叫做函数在点 x_0 的全微分，记为 $df(x_0) = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i = \sum_{i=1}^m A_i dx^i$ ，这里我们约定 $\Delta x^i = dx^i, i = 1, \dots, m$ ”。^[5]事实上，只要把函数 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 的各变元 x^i ，都换成依赖于变元 $t = (t^1, \dots, t^k)$ 的可微函数， $x^i = x^i(t) = x^i(t^1, \dots, t^k), i = 1, \dots, m$ ，那么，根据复合函数求导的链式法则有 $\frac{\partial}{\partial t^j} (f(x^1(t), \dots, x^m(t))) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} (x(t)) \cdot \frac{\partial x^i(t)}{\partial t^j}, j = 1, \dots, k$

在这里， $dx^i \neq \Delta x^i$ 。因此，约定或者强行定义 $\Delta x^i = dx^i$ 都是荒唐的。如果采取所谓的“Cauchy 式演绎”就得分别令 $x = x^i$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, m$ ，这样，就有 $x = x^1 = x^2 = \dots = x^m$ ，如此这般，本来的多元函数又变成了不伦不类的一元函数，这显然是荒唐的。

4 近代分析并没有解决微分的正确讲解问题

以高度抽象化著称的近代分析或曰现代分析是回避微分这个概念的，因为它可以以“不屑”为由不谈它。可另一方面又都往往设有“微分学”一章，如迪尔多内的权威教材《现代分析基础》的第八章、胡适耕的《近代分析基础》的第二章，当然，他们的微分学所谈的都是导数问题。

“我们称 A 到 F 的连续映射 f 在点 $x_0 \in A$

是可微的, 如果存在 E 到 F 的线性映射 u 使得 $x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ 与 f 在 x_0 点相切。刚才已看到这个映射是唯一的; 称它为 f 在 x_0 点的导数 (或全导数), 记为 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$ 。”^[6]

“定义 2.1.1 设 $F: \Omega \subset X \rightarrow Y, x_0 \in \Omega$ 。若存在 $T \in L(X, Y)$, 使得

$$\Delta F(x_0, h) = Th + o(h), h \rightarrow 0$$

这意味着

$$\|\Delta F(x_0, h) - Th\| = o(\|h\|), \|h\| \rightarrow 0,$$

则说映射 F 在点 x_0 处 Fréchet 可微, 简称为 F 可微, 而称 T 为 F 在点 x_0 的 Fréchet 导数, 简称 F 导数, 记为 $F'(x_0)$ 。”^[7]

诚如一位不愿透露姓名的著名数学家所言: “我只讲导数回避微分, 因为我承认不懂得微分。”

不仅如此, 现代分析也同样不能解决古典微积分原理错误的微分方程的求解原理问题, 著名的隐函数定理也只是回答了解的存在和连续及可微问题。

古典微积分原理的微分定义是错误的, 以现代和高度抽象为标志的现代分析也同样没有解决微分的正确讲解问题, 诚如胡适耕教授所言: “古典微分学与近代微分学并无实质区别, 只是近代结果更具一般性罢了。”^[8]

5 陈天权先生的微分仍属单位映射一类

现行微积分原理的错误是明显的, 北京大学数学科学学院的学者试图通过陈天权先生的微分定义方式解决问题, 事实上这仍然是徒劳的。陈天权先生与张筑生先生一样, 都是少有的优秀微积分教育家。陈天权先生采用矩阵定义微分, 非常巧妙地实现了微分定义自一元向多元的过渡,

然而, 我们要注意到陈先生的如下表述: “特别, 当 $f = id_R$ (R 上的恒等映射) 时, 即 $f: x \rightarrow x$ 或 $\forall x \in R (f(x) = x)$ 时, 为了方便, 映射 $f = id_R$ 常记作 x 。应注意的是: x 表示映射

$$x: x \rightarrow x$$

上式中, 第一个 x 表示映射, 第二个 x 表示自变量 x 的值, 第三个 x 表示自变量的值 x 在映射 x 下的值。同一个 x 表示三个不同的东西似乎会造成混乱。但根据上下文, 一般不会混淆。当然, 同学应小心区别它们的涵义。”^[9]

这里, 诚如教材编著者所言, 作恒等映射等价于 “ $f(x) = x$ ”, 那么, 对于通常的 $f(x) \neq x$, 即一般的 $y = f(x)$ 情形, 还有 “ $df_x = f(x)dx$ ”^[10] 吗? 这样的微分推广到多元情形也同样犯个别等同一一般的逻辑错误。请问数学科学学院的同行们, 不是吗?

6 微分的过渡性讲法

建立并让数学教师们习惯新的数学的数一形模型, 还需要时日, 因为这本质上是一场数学革命。然而, 我们可以先搞一个过渡性的微分定义。

设 $y = F(x)$ 在 $U(x_0, \eta)$ 内可导, 其导函数为 $y' = f(x)$, 即 $F'(x) = f(x)$ 。定义 $dy = f(x)dx$ 为函数 $y = F(x)$ 在 $U(x_0, \eta)$ 的微分函数, 简称微分。这相当于在 XOY 坐标系内又建立一个 $dxOdy$ 坐标系, 其中 dx 是 x 基础之上的与 Δx 不发生关系的新增量, dy 是 dx 引起的在 y 基础之上的与 Δy 不发生关系的新增量, 参见图 1。微分函数 $dy(x, dx)$ 是依附函数, 它不同于传统的二元函数, 因为 dx 是依附于 x 的。我们称 $dy = f(x_0)dx$ 为函数 $F(x)$ 在 x_0 点的微分。

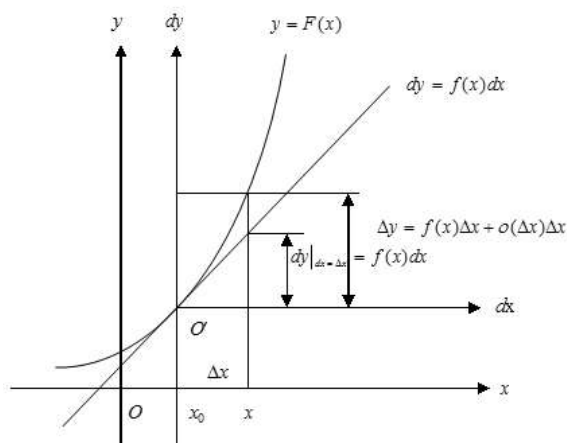


图 1

通过 $\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x$ 可知, 当 $dx = \Delta x$ 时, $dy = f(x)dx = f(x)\Delta x$ 就是 Δy 的线性主部, 即 $\Delta y - dy = o(\Delta x)\Delta x$ 。这样, 导函数 $f(x)$ 可以写作微商 $\frac{dy}{dx}$ 形式。

需强调指出的是, 这里的微分定义与传统的微分定义的一个根本的不同在于, dx 与 Δx 以及 dy 与 Δy 不再有必然联系。

对于多元微分, 设 m 元函数 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 在点 $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ 邻近有定义, 如果存在 $A_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, 使得对于充分小的 $\Delta x = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^m)$, 有这样的关系 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x^i + o(\|\Delta x\|)$, 那么, 我们就说函数 f 在点 x_0 可微。令 $dx = (dx^1, \dots, dx^m)$ 为 $x = (x^1, \dots, x^m)$ 之上独立于 $\Delta x = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^m)$ 的增量, 定义

$df = \sum_{i=1}^m A_i dx^i$ 为 $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ 在点 $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ 的全微分。

采用如上新的微分定义, 微积分原理不再自相矛盾, 隐函数的导数、参数方程的导数和不定积分的第二类换元法, 以及微分方程求解原理也都不再说不通。

7 结论

如上定义微分的办法, 虽然不再导致微积分原理自相矛盾, 但是, 如果从细微处着眼, 仍然存在不够严密的问题。因此, 这个办法只能权作下一次数学革命前的过渡性办法。■

参考文献

- [1] 陈天权. 数学分析讲义 (第一册). 北京: 北京大学出版社, 2009: 166-168.
- [2] 张景中. 数学与哲学. 山东: 大连理工大学出版社, 2008: 26.
- [3] 李文林. 数学史概论. 北京: 高等教育出版社, 2002: 169.
- [4] 张景中. 直来直去的微积分. 北京: 科学出版社, 2010.
- [5] 张筑生. 数学分析新讲 (第二册). 北京: 北京大学出版社, 1990: 204-205.
- [6] 张景中. 直来直去的微积分. 北京: 科学出版社, 2010.
- [7] 陈适耕. 近代分析基础. 北京: 科学出版社, 2009: 52-53.
- [8] 陈适耕. 近代分析基础. 北京: 科学出版社, 2009: 73.
- [9] 陈天权. 数学分析讲义 (第一册). 北京: 北京大学出版社, 2009, 167.
- [10] 陈天权. 数学分析讲义 (第一册). 北京: 北京大学出版社, 2009, 168.

推荐语:

微积分原理是整个现代数学的核心,完善和发展微积分原理具有特别重要的意义。本文所定义的分,解决了自柯西以来现行微积分原理 195 年来的逻辑问题,不定积分第二类换元法和微分方程的求解也顺理成章。文中提出的极限论的理论基础问题更是发人深省。

推荐人:罗华章

罗华章,数学家。1989 年获国际奥林匹克数学竞赛冠军,1994 年毕业于北京大学数学科学学院,同年赴美国麻省理工学院留学。曾师从菲尔兹、沃尔夫双重数学大奖获得者数学家丘成桐先生。在麻省理工学院数学系获数学博士、数学博士后,目前在英国从事金融数学和基础数学研究。

How to Teach Differential Correctly

Ding Xiaoping

(Jieyin Temple, Zhejiang 365500)

Abstract: Correctly teaching differentials is an unsolved problem in mathematics. This paper briefly describes the reaction of the academia since the two articles, namely, A Brief Discussion on Mistakes in Current Principles of Calculus and A Brief Discussion on Functions of Real Variables as the Perfection of Principles of Calculus, have been published. This paper also points out the lack of mathematical basis of limit theory. And then points out that the derivative defined by the matrix is still incorrect. Finally, the correct way of teaching calculus is given.

Key words: Principles of Calculus; Derivative; Differential; Number-figure Model